REVISTA DE MATEMATICAS
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMATICAS
SEMINARIO DE MATEMATICAS.—ESCUELA DE INGENIERIA DE LA UNIVERSIDAD DE CHILE

Método del factor integrante aplicado a las ecuaciones diferenciales ordinarias

Tomado de la clase del profesor Dgo. Almendras

El método que a continuación se expone, encuentra su campo de aplicación en la determinación de la solución general de la ecuación diferencial lineal, con coeficientes constantes y segundo miembro. El consiste en la determinación de un factor λ (x) que al multiplicar los dos miembros de la ecuación diferencial reduzca al primero en una derivada de una expresión de menor orden con respecto a y (x); la ecuación siendo de la forma:

$$(1) \qquad A_n D^n y + A_{n-1} D_y^{n-1} + \dots + A_o y = f(x)$$

Multiplicando por λ (x) la ecuación anterior procuraremos reducir al primer miembro en una derivada, para lo cual se puede escribir, considerando que los coeficientes A_n son constantes:

$$\lambda D^n y = \frac{d}{dx}\left[\lambda \frac{d y^{n-1}}{dx^{n-1}}\right] - \frac{d\lambda}{dx}\frac{d y^{n-1}}{dx^{n-1}} \quad . \text{ y como } \frac{d\lambda}{dx}\frac{d y^{n-1}}{dx^{n-1}} =$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{d\lambda}{dx}\frac{d y^{n-2}}{dx^{n-2}}\right] - \frac{d^2\lambda}{dx^2}\frac{d y^{n-2}}{dx^{n-2}} \text{ , se tiene que:}$$

$\lambda D_y^n = D\left[\lambda D_y^{n-1} - D\lambda \, . \, D_y^{n-2}\right] + D^2\lambda D_y^{n-2}$, expresión, que sometiéndola a sucesivas transformaciones y reemplazos, análogos al anterior, conducirá a la fórmula general:

$$\lambda D_y^n = D\left[\lambda D_y^{n-1} - D\lambda D_y^{n-2} + D^2\lambda D_y^{n-3} + \dots + (-1)_y^{n-1} D^{n-1}\lambda\right] + (-1)_y^n D^n\lambda.$$

y análogamente, se tiene:

$$\lambda D_y^{n-1} = D\,[\lambda D_y^{n-2} - D\lambda.\, D_y^{n-3} + D^2\lambda D_y^{n-4} \mp \ldots + (-1)_y^{n-2} D_\lambda^{n-2}] + (-1)_y^{n-1} D_\lambda^{n-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda Dy = D\,[\lambda y] - yD\lambda$$
$$\lambda y = \lambda y$$

Multiplicando estas relaciones por los respectivos coeficientes de la ecuación (1) y sumando obtenemos esta ecuación multiplicada por el factor $\lambda(x)$ en la forma siguiente:

$$(2) \qquad D\varphi + (-1)\,[A_n D^n\lambda - A_{n-1} D^{n-1}\lambda \pm \ldots + (-1)^{n+1} A_o]\, y = \lambda f(x)$$

donde φ es una relación conocida, que depende de los coeficientes A_i, de $y(x)$ $y'(x)$, y'', ... $y^{(n-1)}$ y de λ.

El primer miembro de (2) se reduce a una derivada perfecta si,

$$(3) \qquad A_n D^n\lambda - A_{n-1} D^{n-1}\lambda \pm \ldots. + (-1)^{n+1} A_o\lambda = 0$$

Esta ecuación nos permitirá encontrar n factores integrantes, que son las soluciones particulares linealmente independientes. Estos factores integrantes reemplazados en (2) y luego integrando conducirá a n ecuaciones de la forma:

$$(4) \quad A_n\lambda_i D^{n-1}y + [A_{n-1} - A_n D\lambda_i]\, D^{n-2}y + \ldots. + [A_1\lambda_i - A_2 D\lambda_i \pm \ldots. + (-1)^n A_n D^{n-1}\lambda_i]\; y = \int \lambda_i f(x)dx + C_i$$

Para: $i = 1, 2, \ldots\ldots n$

Este sistema se resolverá con respecto $y(x)$. Para ello es previo el cálculo del determinante de los coeficientes del sistema que es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_n\lambda_1 & [A_{n-1}\lambda_1 - A_n D\lambda_1] \ldots & [A_1\lambda_1 - A_2 D\lambda_1 \pm \ldots (-1)^{n-1} A_n D^{n-1}\lambda_1] \\ A_n\lambda_2 & [A_{n-1}\lambda_2 - A_n D\lambda_2] \ldots & [A_1\lambda_2 - A_2 D\lambda_2 \pm \ldots (-1)^{n-1} A_n D^{n-1}\lambda_2] \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_n\lambda_n & [A_{n-1}\lambda_n - A_n D\lambda_n] \ldots & [A_1\lambda_n - A_2 D\lambda_n \pm \ldots (-1)^{n-1} A_n D^{n-1}\lambda_n] \end{vmatrix}$$

Este determinante se puede descomponer en una suma de otros y en que uno solo es distinto de cero y los demás tienen dos o más columnas iguales y, por consiguiente, se anulan. Finalmente se tiene:

$$\Delta = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} A_n^n \begin{vmatrix} \lambda_1 & D\lambda_1 & D^2\lambda_1 \ldots & D^{n-1}\lambda_1 \\ \lambda_2 & D\lambda_2 & D^2\lambda_2 \ldots & D^{n-1}\lambda_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_n & D\lambda_n & D^2\lambda_n \ldots & D^{n-1}\lambda_n \end{vmatrix}$$

En forma análoga se determina el numerador de la expresión que da el valor de y(x), llegándose al siguiente resultado:

$$(5)\quad y = (-1)^{n-1}\frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & D\lambda_1 \ldots\ldots D^{n-2}\lambda_1 & I_1 + C_1 \\ \lambda_2 & D\lambda_2 \ldots\ldots D^{n-2}\lambda_2 & I_2 + C_2 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \lambda_n & D\lambda_n \ldots\ldots D^{n-2}\lambda_n & I_n + C_n \end{vmatrix}}{A_n\begin{vmatrix} \lambda_1 & D\lambda_1 \ldots\ldots D^{n-2}\lambda_1 & D^{n-1}\lambda_1 \\ \lambda_2 & D\lambda_2 \ldots\ldots D^{n-2}\lambda_2 & D^{n-1}\lambda_2 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \lambda_n & D\lambda_n \ldots\ldots D^{n-2}\lambda_n & D^{n-1}\lambda_n \end{vmatrix}}; \quad \text{Donde: } I_i = \int \lambda_i f(x)\,dx$$

Esta fórmula permite llegar a la solución general más fácilmente que por el método de variación de las constantes.

Ejemplo.—Sea integrar la ecuación: $D^2y + m\,Dy - 6\,m^2\,y = n^x$.
La ecuación que proporciona los factores integrantes, es:

$$D^2\lambda - mD\lambda - 6m^2\lambda = 0$$

y Luego: $\lambda_1 = e^{3xm}$
$\lambda_2 = e^{-2mx}$

Reemplazadas estas funciones en (5) se tiene:

$$y = C_1e^{2mx} + C_2e^{-3mx} - \frac{n^x}{(3m + \log n)\ (2m - \log n)}$$

Ejercicios: Integrar

1) $D^2y - 4Dy + 3y = e^{3x}$
2) $D^2y + 4y = e^x \cos 2x$
3) $D^2y + y = \sec x.$