Biblioteca Central
Escuela de Ingeniería

ANALES
DEL INSTITUTO DE INGENIEROS DE CHILE

SAN MARTIN 352 — CASILLA 487 — SANTIAGO

Sucesor

De la: "SOCIEDAD DE INGENIERIA" Fundada el 31 de Mayo de 1888

Y del: "INSTITUTO DE INGENIEROS" Fundado el 28 de Octubre de 1888

Con Personalidad Jurídica desde el 28 de diciembre de 1900

Adherido a la USAI y a la CONFERENCIA MUNDIAL DE LA ENERGIA

AÑO LXVIII ● NOVIEMBRE - DICIEMBRE DE 1955 ● N.os 11 - 12

Comisión Editora: *Raúl Sáez (Pdte.), Rodrigo Flores.*

Cálculo de losas cruzadas continuas

Trabajo presentado a las Cuartas Jornadas de Ingeniería Estructural por el Ing. Alex Tripolsky

VIII. La rigidez de las vigas a torsión

El método de los grados de empotramiento permite en una forma muy fácil tomar en cuenta la influencia de rigidez a torsión de las vigas del contorno sobre el empotramiento elástico de las losas.

En las fórmulas (62) y (76) que definen el valor del grado de empotramiento interviene el término ΣS- suma de las rigideces de los elementos adyacentes al lado considerado de la losa, entonces para obtener la influencia de la resistencia de la viga a la torsión basta conocer su rigidez « S », es decir el momento que produce una rotación angular cuyo valor máximo es igual a 1.

Se puede hacer la suposición de que la deformación transversal angular de una viga cargada según su eje por un momento repartido de torsión es igual a la deformación de una losa que tiene tres lados simplemente apoyados y el cuarto libre, sometida a la acción de un momento de borde repartido, aplicado en el costado opuesto al borde libre (ver fig. 23).

Este problema fué tratado ya por el profesor K. Girkmann [12] de donde tomaremos las fórmulas finales.

En el cálculo de las rigideces de las losas se consideró siempre la acción de un momento de borde repartido a lo largo de él, según una primera armónica.

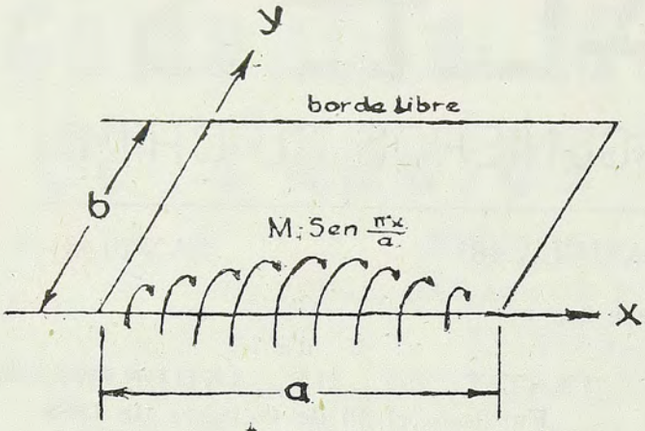


Fig. 23

En el caso de la definición de la rigidez de las vigas a la torsión vamos a analizar también solamente la influencia de la primera armónica.

Entonces, en el caso de un momento repartido según M Sen $\frac{\pi x}{a}$ la deformación angular sigue a lo largo del borde la ley sinusoidal cuyo máximo al centro es

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{\substack{y=o \\ x=\frac{a}{2}}} = M \frac{a}{2k\pi} \cdot \frac{3 \operatorname{Cos} h^2 \frac{\pi b}{a} + \frac{\pi^2 b^2}{a^2} + 1}{3 \operatorname{Sen} h \frac{\pi b}{a} \cos h \frac{\pi b}{a} + \frac{\pi b}{a}}$$

$$\text{si} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 1 \qquad\qquad M = S$$

y en consecuencia la fórmula que define la rigidez será

$$S = \frac{2k\pi}{a} \cdot \frac{3 \operatorname{Sen} h \frac{\pi b}{a} \operatorname{Cos} h \frac{\pi b}{a} + \frac{\pi b}{a}}{3 \operatorname{Cos} h^2 \frac{\pi b}{a} + \frac{\pi^2 b^2}{a^2} + 1} \quad \ldots . (81)$$

introduciendo varios valores de $m = \frac{b}{a}$ tales como 0.05; 0.10; 0.20, etc. en la fórmula (81) se puede obtener la curva indicada en la fig. 24 que define la variación de la rigidez en función de « $\frac{b}{a}$ » (la altura de la viga dividida por el largo de ella).

Para obtener la rigidez de la viga a torsión se multiplica el coeficiente tomado de la fig. 24 correspondiente a un cierto valor de « $\frac{b}{a}$ », por el valor « $\frac{EI}{a}$ »

$$S_{viga} = \text{Coef} \times \frac{EI}{a}$$

en que « I » es el momento de inercia de la unidad de largo de la viga $I = 1 \frac{h^3}{12}$ y « h » el espesor de ella.

El hecho de no cumplirse la condición de simple apoyo de los lados x = 0 y x = a en las vigas de relativamente pequeñas alturas $\frac{b}{a} \leq 0.50$ puede influir muy poco sobre el valor de la rigidez. Si vamos a aumentar la relación « $\frac{b}{a}$ » de 0.50 a 1.00 la influencia del apoyo libre y = b se pierde casi por completo y

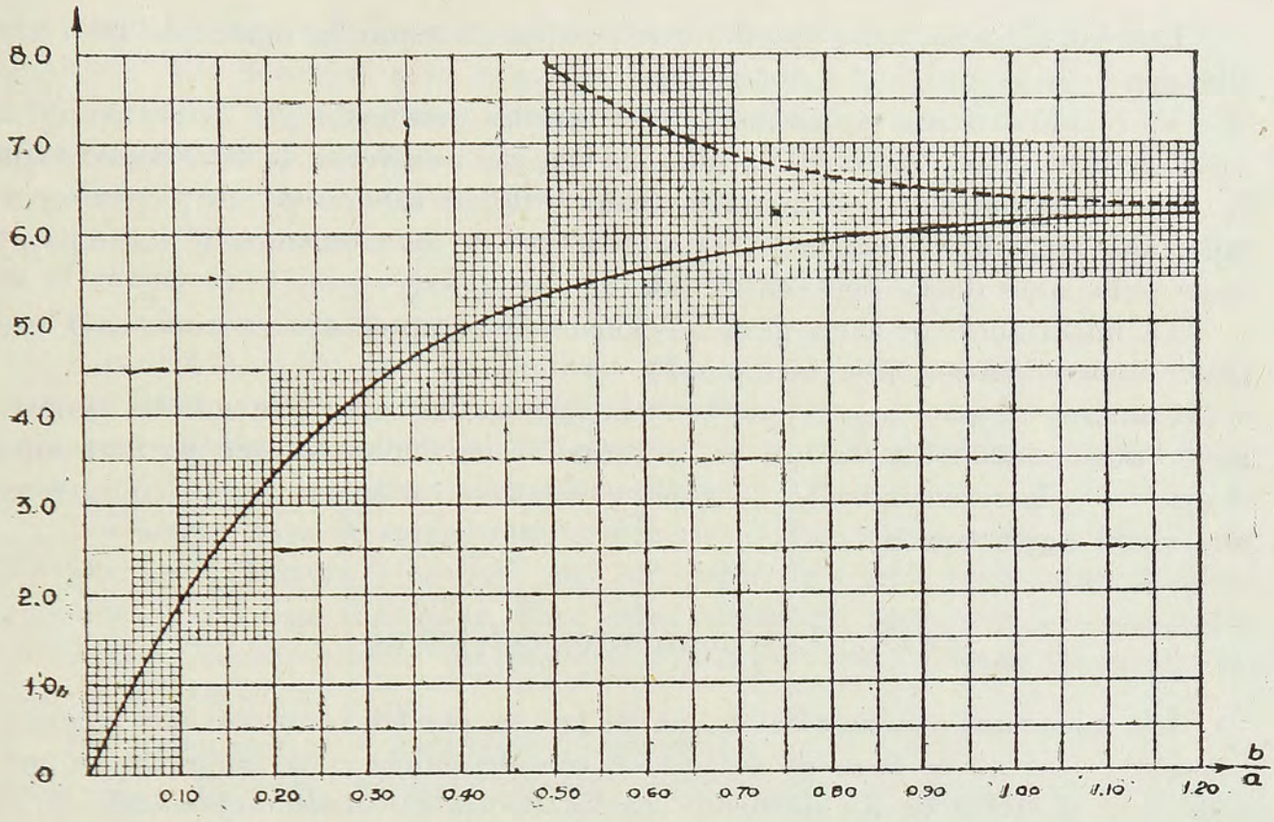


Fig. 24

para $\frac{b}{a} > 1.0$ las rigideces obtenidas a base de la figura 24 coinciden prácticamente con los casos de « S_{min} » calculados anteriormente para las losas apoyadas en sus cuatro costados.

En los casos de vigas altas, los con $\frac{b}{a} > 1.0$ (o losas con el borde $y = b$ libre) cuyas condiciones de borde $x = 0$ y $x = a$ no cumplen la exigencia de simple apoyo, sería más correcto usar las tablas de rigideces anotadas anteriormente para las losas y que toman en cuenta las condiciones de empotramiento (f_c y f_d) de los lados laterales.

Para formarse una idea sobre la influencia del apoyo del costado $y = b$ se ha indicado en la fig. 24 con trazo de puntos la curva que corresponde a la rigidez mínima de la losa apoyada en todo su contorno.

Comparando estas dos curvas es posible orientarse en los casos intermedios en que $0.5 < \frac{b}{a} < 1.0$.

El cálculo de losas con influencia de la resistencia de vigas a torsión muestra su importancia relativamente grande en el caso en que existen apreciables diferencias entre las cargas de dos losas vecinas (ver ejemplo 2) y también su notable influencia sobre la rapidez de la amortiguación del momento transportado desde la losa cargada hacia las losas descargadas disminuyendo así el efecto de cargas en las losas vecinas sobre el « M_{max} » del tramo de la losa considerada.

Hay que llamar la atención hacia el hecho de que el valor de la rigidez calculado según la fórmula (81) supone que los apoyos $x = 0$ y $x = a$ de la viga, no puede desplazarse.

En realidad hay varios factores que pueden disminuir la rigidez de las vigas; ellos son:

a) El giro vertical de las vigas transversales producido por la acción de la carga vertical sobre ellas obliga a girar en sentido transversal la viga considerada.

b) La flexión de las vigas transversales y de las cabezas de los pilares soportantes que reciben un momento flector (reacción de los momentos de torsión aplicados a lo largo de la viga considerada).

La importancia de estos giros adicionales debe apreciarse en cada caso particular separadamente (ver ejemplo 7).

Conviene de paso anotar que la resistencia de las vigas a la torsión, generalmente despreciada, si se calcula en la forma recién indicada hace meditar sobre el acierto de la recomendación de usar estribos abiertos en las vigas T que tienen una unión rígida con la losa.

IX. Los momentos del tramo

Los momentos máximos del tramo de la losa pueden obtenerse por la superposición del efecto de la carga de la losa, considerándola como simplemente apoyada, con el efecto de los momentos en los bordes calculados suponiendo aquel estado de cargas del campo de losas que produce el máximo momento en el tramo de la losa considerarla.

La expresión general para el momento en cualquier punto del tramo de la losa, aun para los casos de acción de los tipos de carga más simples, es demasiado compleja para una aplicación práctica, lo cual obliga al calculista a limitarse al empleo de alguna de las numerosas tablas desarrolladas por diversos autores que dan la posibilidad de calcular en una forma sencilla los momentos del tramo en ciertos puntos de la losa simplemente apoyada para varias relaciones de lados « $\frac{b}{a}$ » y diversos tipos de carga.

Según nuestros conocimientos, las tablas más completas de este tipo son las desarrolladas por el profesor Pucher que permiten calcular, en forma muy simple, los momentos en el centro de la losa bajo la acción de cualquier carga. Desgraciadamente las tablas de que dispone el autor y que figuran en la obra de Föppl y Sonntag [14] abarcan solamente unos pocos casos para las relaciones de lados $\frac{b}{a} = 0.8$; 1.0 y 1.20 lo cual limita su uso práctico (salvo que se recurra a la interpolación).

Las tablas disponibles de momentos en el tramo generalmente dan valores para el centro de la losa mientras que, en las losas continuas y para cargas simétricas con respecto al centro de la losa, el punto de momento máximo no siempre coincide con el centro de la losa.

Además, en el caso de acción de cargas móviles (cálculo del tablero de un puente) es necesario analizar la colocación de ellas en la posición que produce el momento máximo en el tramo.

Casualmente para las losas cruzadas los momentos de apoyo influyen sobre el tramo mucho menos que en el caso de las vigas. Como ya observamos anteriormente en las figuras 5 y 6 y en las tablas 4 y 5 la variación de los momentos

del tramo debidos a la acción del momento de apoyo, especialmente de «M_y», al alejarse del borde es muy pequeña, desplazando muy poco el punto de momento máximo, respecto del punto de momento máximo en el caso de losa simplemente apoyada.

Todas estas consideraciones nos permiten, en los casos más corrientes de cálculo de losas continuas, ubicar aproximadamente el máximo del momento en el tramo en el mismo punto en que se obtiene el máximo momento para la losa cargada, simplemente apoyada.

Para las personas que se interesan por calcular más exactamente el valor máximo del momento en el tramo, y su punto de acción en los diferentes casos de cargas móviles, se recomienda la consulta de la obra del doctor Fischer [8] que trata esta materia en forma bastante amplia.

Los únicos tipos de carga tratados con cierto detalle por varios autores como Timoshenko [11], Marcus [2], Lewe [13], etc. son casos de cargas tales como la carga repartida y la carga triangular. Para estas cargas, en caso necesario, es posible buscar el máximo momento del tramo con más precisión haciendo uso de las tablas dadas por ellos.

Los momentos en el centro de la losa simplemente apoyada cargada por una carga uniformemente repartida pueden calcularse con las siguientes fórmulas:

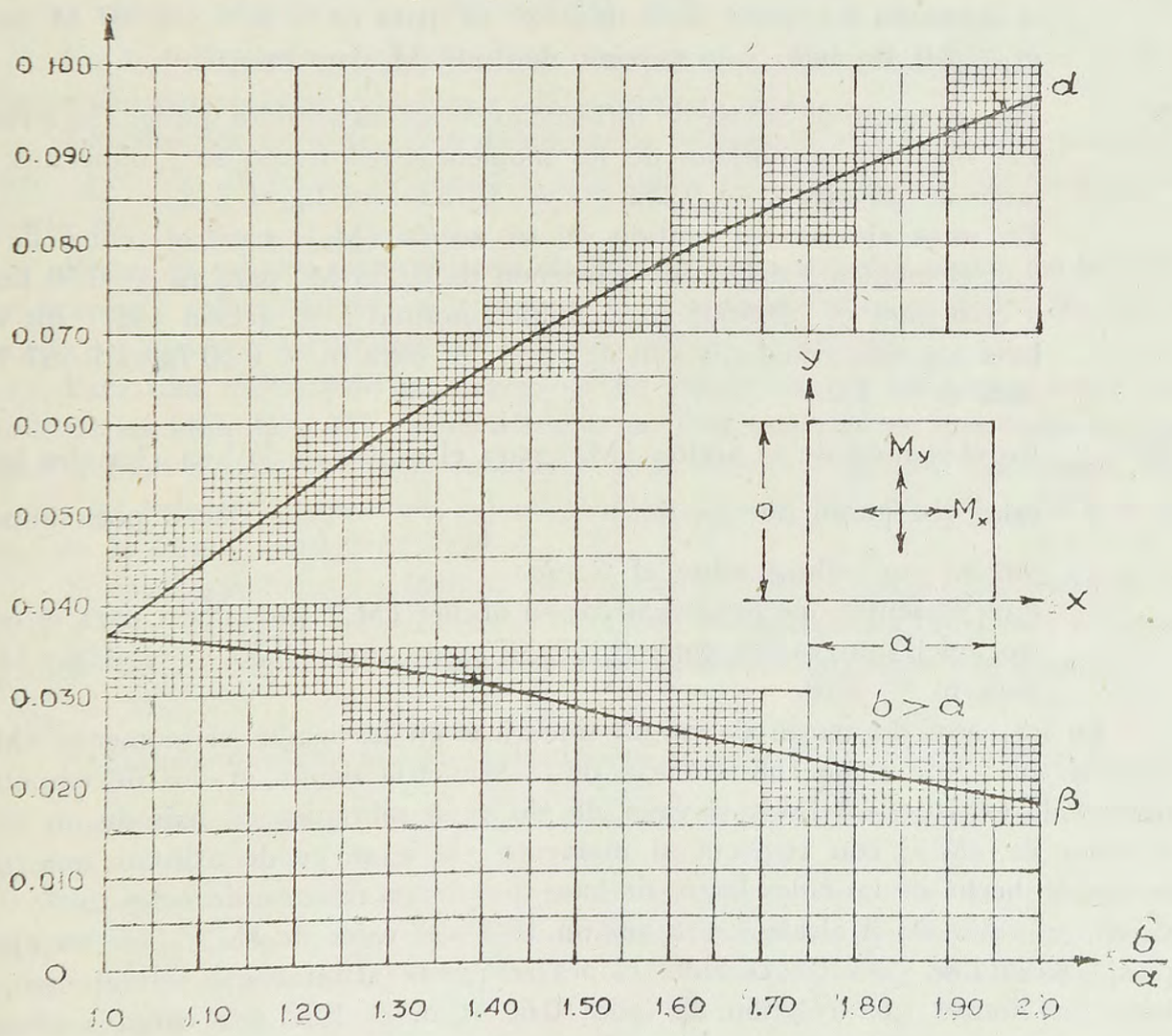


Fig. 25

$M_x = \alpha \, qa^2$

$M_y = \beta \, qa^2$

Los coeficientes «α» y «β» se toman de la figura 25.

Los valores «α» y «β» representados en la figura 25 se tomaron del libro del profesor Timoshenko [11] recalculándolas para el valor de $\mu = 0$.

Se puede también, en el caso de carga repartida, usar las tablas de Löser (caso 1) que dan para $\frac{b}{a} < 1.50$ momentos cuyos valores son casi idénticos a los calculados a base de «α» y «β».

Para $\frac{b}{a} > 1.50$ las diferencias alcanzan hasta un 10% por defecto en relación con los calculados por Timoshenko.

Para formarse una idea de cómo influyen los momentos de apoyo sobre el momento en el tramo de losas con relación de lados entre 0.5 y 2.0 vamos a analizar la influencia de sus componentes sinusoidales M′, M″ y M‴ una por una, aprovechando las tablas 4 y 5.

M′ En el sentido de su acción (M_y), para el centro de la losa el momento del tramo varía entre 0.279 M′ para m = 0.50 y 0.015 M′ para m = 1.20. En el sentido perpendicular a su acción (M_x), para el centro de la losa el momento del tramo varía de 0.097 M′ para m = 0.50 y 0.067 M′ para m = 2.0, llegando a un máximo de 0.144 M′ para m = 1.0.

M″ Para el centro de la losa sus influencias en ambos sentidos son iguales a cero. Los máximos y mínimos de los momentos del tramo se producen a lo largo de los ejes x = 0.25a y x = 0.75a (ver fig. 1 ó 3).
En estos ejes, en el sentido de su acción (M_y), para el centro de la losa el momento del tramo partiendo de 0.056 M″ para m = 0.50 llega a cero para m > 0.60; en el sentido normal a su acción (M_x) sus valores son más grandes, y van de 0.144 M″ para m = 0.50 hasta 0.067 M″ para m = 1.0.

M‴ En el sentido de su acción (M_y) para el centro de la losa (los ejes laterales que pasan por las líneas $x = \frac{a}{6}$ y $x = \frac{5}{6}$ a tienen poca importancia) no influye sobre el tramo.
Para el sentido perpendicular de su acción (M_x) los valores para el centro del tramo varían entre 0.108 M‴ para m = 0.50 hasta 0.060 M‴ para m = 0.70.

En los casos de acción de cargas simétricas en las cuales el momento «M″» aparece solamente como consecuencia de la asimetría de los grados de empotramiento de los lados laterales, el valor de «M″» no sobrepasa en más de un 20% el valor de «M′»; con respecto al momento «M‴» se puede afirmar que, con excepción hecha de los lados largos de losas que tienen relación de lados m = 0.50 y 0.60, el valor de él alcanza rara vez un 10% del valor de «M′» (ver los ejemplos). Basándose en estas consideraciones se puede afirmar que, en el caso de losas que tienen una relación de lados $0.60 < m < 1.60$ con carga simétrica, sobre el momento del tramo sólo influyen los momentos de apoyo distribuídos según la primera armónica M′.

Ahora nos queda sólo investigar aquel estado de cargas, en un campo de losas continuas, que produce el máximo momento del tramo en la losa considerada.

En la figura 26 vemos un grupo de losas continuas para el cual analizaremos el valor del momento del tramo de la losa I.

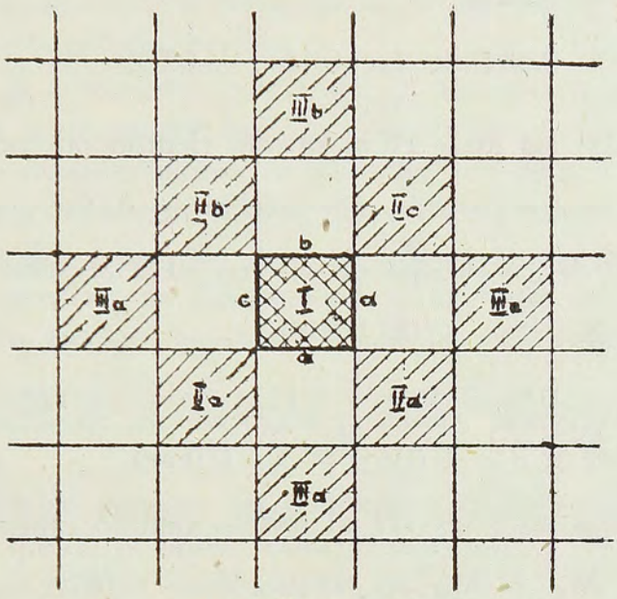


Fig. 26

En los cálculos prácticos existen siempre dos tipos de cargas —una es la carga permanente «g» y la otra es la sobrecarga «p».

De estos dos tipos de carga solamente la sobrecarga «p» puede ser modificada en su posición en forma de producir el máximo de momento del tramo para una cierta losa.

Como es sabido, para obtener el máximo momento del tramo en la losa I es necesario colocar las cargas «p» sobre las losas que indica la figura 26, esto es, según los cuadros del mismo color de un tablero de ajedrez.

Para una explicación más clara de las influencias de las cargas sobre cada una de las losas II y III vamos a tomar un caso concreto en que todas las losas que forman el conjunto son cuadradas y de espesores iguales. Las cargas para todas las losas son las mismas y la sobrecarga «p» la supondremos igual a la mitad de la carga permanente «g».

Si cargamos todas las losas al mismo tiempo con la carga «g», esto equivaldría a un empotramiento perfecto ($f = 1$) de todos los lados de la losa I. Supongamos que los valores de los momentos de apoyo en este caso son iguales a — 1 ($M_a = M_b = M_c = M_d = -1$).

Analizaremos ahora la influencia de una carga $p = \frac{g}{2}$ sobre las losas II y III.

Los grados de empotramiento en este caso se pueden tomar aproximadamente iguales a 0.50 (ver ejemplos 3 y 4).

Suponiendo aproximadamente que los momentos de borde son directamente proporcionales a los grados de empotramiento respectivos, tendremos que todos los momentos de apoyo de las losas I, II y III (antes del transporte de momentos) serán iguales a — 0.25.

Los «C. O.» tomados de las tablas para $m = 1.00$ y $f = 0.50$

son $M_b' = -0.059$ y $M_c' = -0.137$

Entonces la influencia de la carga «p» en la losa «II a» será

$$M_a = M_c = + 0.25 \times 0.137 - 0.25 \times 0.137^2 = 0.0343 - 0.0047 = \\ = + 0.0296$$

$$M_b = M_d = + 0.0343 \times (- 0.137 - 0.059) = - 0.0067$$

Si cargamos todas las losas II al mismo tiempo obtendremos:

$$M_a = M_b = M_c = M_d = (+ 0.0296 - 0.0067) \times 2 = + 0.0458$$

La influencia de la carga «p» en la losa «III a» será:

$$M_c = + 0.25 \times 0.059 = + 0.0148$$

$$M_a = M_b = + 0.0148 \times (- 0.137) = - 0.0020$$

$$M_d = + 0.0148 \times (- 0.059) = - 0.0009$$

Si cargamos todas las losas III al mismo tiempo obtendremos

$$M_a = M_b = M_c = M_d = + 0.0148 - 0.0020 \times 2 - 0.0009 = \\ = + 0.0099$$

y en definitiva los momentos de apoyo debidos a la acción de las cargas «g» y «p» sumados serán:

$$M_{ap} = - 1.00 - 0.25 + 0.0458 + 0.0099 = - 1.1943$$

Si consideramos solamente la carga «g» y la carga «p» sobre la losa I, el momento $M_{ap} = - 1.00 - 0.25 = - 1.25$, esto nos demuestra que las cargas sobre las losas II y III influyen sobre el momento de apoyo solamente en un 4.4%.

Además para el centro de la losa influye solamente (0.144 + 0.056) x 2 M_{ap} o sea un 40% del «M_{ap}» y en consecuencia el error producido por haber despreciado el efecto de la carga «p» sobre todas las losas excepto la losa I significa para el momento del tramo una disminución de sólo 1.8% del valor del momento de apoyo «M_{ap}».

En el caso en que la sobrecarga «p» es igual a «g» repitiendo el cálculo anterior, llegaremos a determinar un error para «M_{tr}» de un 2.95% en vez de 1.8%, lo que tampoco puede considerarse como un error inaceptable.

Visto lo expuesto anteriormente se llega a la conclusión de que para obtener el máximo momento del tramo, en el caso en que actúan las cargas «g» y «p» basta, con suficiente aproximación, calcular el «M_{ap}» producido por la carga «g» para empotramiento perfecto, más la carga «p» que actúa sólo sobre la losa considerada, con sus respectivos grados de empotramiento.

Las conclusiones establecidas antes no cambian fundamentalmente si en vez de losas cuadradas analizamos cualquier campo de losas continuas.

Una excepción a esta regla se produce en el caso de cálculo de losas de un tablero de puente, en que la influencia de la carga móvil puede sobrepasar en varias veces la influencia de la carga permanente.

En éste caso un análisis, del momento del tramo, más detallado puede realizarse en forma relativamente fácil, ya que generalmente los tableros de puente tienen en el sentido transversal sólo uno o dos tramos de losa.

X. Los momentos de apoyo

La enfierradura de tracción que se pone en los apoyos de las losas y cuya cantidad se define según el valor máximo del momento de apoyo, en los casos corrientes, se mantiene igual a lo largo de todo el costado o por lo menos, en la mitad de la zona central del borde.

En consecuencia la ubicación exacta del punto correspondiente al momento máximo de borde no tiene mayor importancia, salvo en los casos de losas muy grandes en los cuales consideraciones de carácter económico justifican la colocación de armaduras más ajustadas al diagrama de momentos de apoyo.

En la mayoría de los casos nos interesa solamente el valor máximo del momento de apoyo sin precisar su distribución a lo largo del borde, y este valor se obtiene sumando los valores de cada una de las tres componentes sinusoidales M', M'' y M'''.

Para evitar este cálculo en los casos prácticos, analizaremos el límite hasta donde puede omitirse.

El análisis más lógico consiste en relacionar los valores máximos de los M'' y M''' con el de M', fijando el límite hasta el cual los M'' y M''' no alcanzan a influir considerablemente en el valor de M_{max}.

Para tener una idea de qué orden puede ser, con respecto a M' el momento M'' en el caso de la acción de cargas simétricas vamos a hacer un pequeño cálculo:

Tomaremos una losa cuadrada ($m = 1$) y para obtener el máximo de los M_a' y M_a'' (ver fig. 10) supondremos que los lados «b» y «c» de ella son simplemente apoyados mientras que los bordes «a» y «d» tienen un cierto grado de empotramiento $f_a = f_d = f$.

Aprovechando las ecuaciones de la losa elásticamente empotrada para los puntos (1) y (2) se puede escribir:

$$\text{Punto 1.} \quad \frac{0.849}{f} M_a' + \frac{0.433}{f} M_a'' + 0.196\, M_d' + 0.030\, M_d'' = -\varphi_1^0 \frac{2k\pi}{a}$$

$$\text{Punto 2.} \quad \frac{0.849}{f} M_a' - \frac{0.433}{f} M_a'' + 0.344\, M_d' + 0.129\, M_d'' = -\varphi_2^0 \frac{2k\pi}{a}$$

Por la simetría de cargas

$$\varphi_1^0 = \varphi_2^0 \quad M_a' = M_d' \quad \text{y} \quad M_a'' = -M_d'' \qquad \text{(ver fig. 9)}$$

Restando la ecuación (2) de la (1) y ordenando los términos obtendremos la fórmula para M_a'' expresada en función de M_a'

$$M_a'' = \frac{0.148\, f}{0.866 + 0.099\, f} M_a'$$

Para el caso corriente si $f = 0.50$ el valor de M_a'' es solamente 8.1% de M_a' y en el caso más desfavorable si $f = 1.0$ $M_a'' = 0.153\, M_a'$. El cálculo recién hecho nos demuestra que para los tipos de carga más frecuentes el valor de M'' rara vez alcanza a un 20% del valor M'.

Superponiendo el diagrama de $M' = 1$ con el de $M'' = 0.20$ podemos observar que el máximo de la suma de ellos alcanza en un punto el valor 1.07 y que

la zona total en que los momentos son superiores al valor «1» tiene una extensión menor que un décimo del largo del lado considerado.

Si ponemos la enfierradura considerando solamente el momento M′ máximo obtendremos en una pequeña parte del borde un aumento de las fatigas admisibles de sólo un 7%.

Queda perfectamente claro que un aumento local de tensiones de este orden no merece mayor consideración desde el punto de vista práctico de la estabilidad de la losa.

En cuanto a la acción del momento de borde M‴ se puede aplicando las mismas consideraciones, llegar a la conclusión de que es posible despreciar su influencia en el caso en que el valor de M‴ sea menor que el 10% del valor de M′.

Basándose en estas consideraciones se puede establecer que si $M'' \leq 0.20\ M'$ y $M''' \leq 0.10\ M'$ se puede limitar el estudio solamente al cálculo de M′ y sus influencias para el apoyo y el tramo.

Hay que destacar el hecho de que el único camino para obtener un valor exacto de M‴, es la resolución en el caso más general de las 12 ecuaciones de la losa elásticamente empotrada. Si calculamos los valores de M′ y M″ aproximadamente según las tablas, e introducimos estos valores en las ecuaciones para los puntos (a), (b), (c) y (d), se pueden también obtener los valores de M‴, pero con un error que a veces (para pequeños valores de M‴) alcanza hasta un 100%.

Un error tan grande es explicable debido a que el momento M‴ se obtiene por diferencia de las influencias de los momentos M′, M″ cuya inexactitud máxima aceptada en el cálculo de las tablas fue del orden de un 5 a 6% (los casos en los cuales $f_c \neq f_d$).

Es bastante difícil indicar para las losas con relación de lados $0.6 < m < 1.6$ condiciones definidas de los casos de carga, en los cuales los valores de M″ y M‴ son grandes; un índice seguro para valorar estos casos es la comparación de los valores de « φ^o » para varias armónicas obtenidas según las ordenadas de las superficies de influencia.

El hecho de que los « φ^o » de la segunda o tercera armónica tengan valores comparables con los de la primera (ver ejemplo 1 b n = 2) indicará que los M″ y M‴ tienen influencia apreciable. Esto sin embargo sucederá solamente en los casos en que la carga más importante de la losa está colocada muy cerca del apoyo considerado (esto se refiere especialmente al valor de M‴).

Investigaremos ahora el estado de cargas de un campo de losas continuas que produce el máximo de momento en los apoyos.

En la figura 27 vemos un campo de losas con las cargas «p» colocadas en la posición que produce el máximo momento de borde «a».

Vamos a hacer un cálculo parecido al hecho anteriormente para obtener los momentos de apoyo para el máximo momento del tramo.

Todos los antecedentes del cálculo son iguales al investigado anteriormente y como en aquel caso tomaremos $p = 0.5\ g$

Carga «p» en una losa	II	$M_a = -\ 0.0020$
Carga «p» en una losa	III	$M_a = -\ 0.0067$
” ” ” ” ”	IV	$M_a = -\ 0.0009$

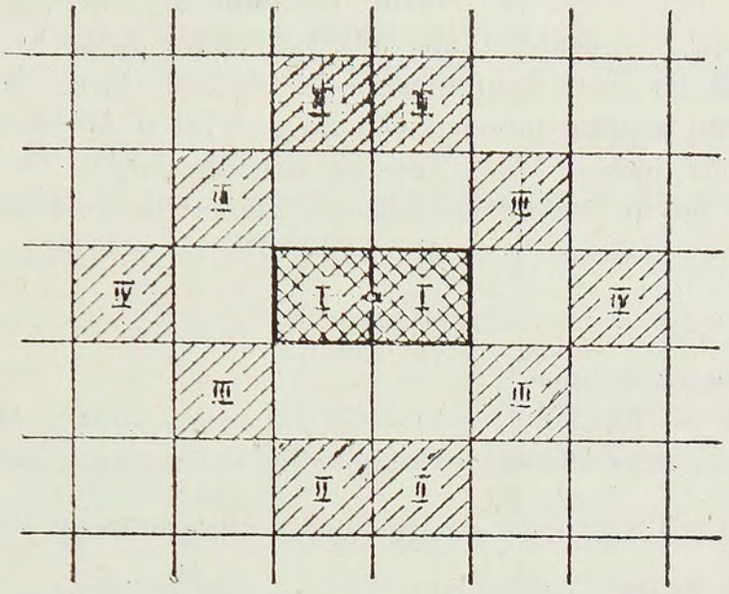


Fig 27

Cargando todas las losas para producir el «M_{max}» de apoyo se tendrá:

$M_a = -1.00 - 0.25 \times 2 - (0.0020 + 0.0087) \times 4 - 0.0009 \times 2 = -1.5366.$

La influencia de la carga sobre las losas II, III y IV en este caso es de sólo un 2,44% de la influencia de la carga «g» más «p» sobre las losas I.

Si p = g esta influencia aumentará de un 2.44% a 3.66%.

En igual forma que en el cálculo anterior se puede llegar a la conclusión de que para obtener el máximo momento de apoyo bastará considerar la carga «g» sobre todas las losas del conjunto y la carga «p» solamente sobre dos losas contiguas al borde considerado.

En el caso de la acción de cargas móviles en los cuales $p >> g$ es necesario avaluar el M_{max} separadamente en cada caso particular.

XI. El cálculo de losas continuas por el método de los grados de empotramiento

El cálculo de losas continuas por el método de los grados de empotramiento se reduce en resumen a las siguientes operaciones:

Se calculan los momentos de inercia y las rigideces de todas las losas y vigas que forman el conjunto, después de acuerdo con la fórmula (76) se definen los grados de empotramiento y una vez conocidos éstos, se toman de las tablas los valores de los coeficientes C. O. correspondientes.

En el caso general de la acción de carga cualquiera, los ángulos de giro « φ^o » se obtienen mediante el uso de las ordenadas de las superficies de influencia.

Conociendo los grados de empotramiento y los ángulos de rotación « $_1\varphi^o$ » se calculan entonces los momentos de empotramiento elástico. La última etapa consiste en la repartición de los momentos obtenidos de la acción de las cargas en cada una de las losas, sobre los elementos vecinos que forman el conjunto.

Los momentos de apoyo definitivos para un determinado borde se obtienen de la suma de los efectos parciales de las cargas aplicadas sobre cada una de las losas del conjunto.

El momento del tramo se obtiene restando del correspondiente momento del tramo de la losa simplemente apoyada los efectos de los momentos de apoyo.

El cálculo de las losas continuas hecho en esta forma no presenta en su desarrollo dificultad alguna, pero en el caso general si se trata de gran número de losas, con varios tipos de carga, resulta bastante largo.

Para reducir en lo posible los cálculos numéricos analizaremos las diversas etapas del cálculo en forma más amplia, a fin de visualizar posibles simplificaciones.

a) Los momentos de inercia.

El cálculo de los momentos de inercia no ofrece dificultad alguna, pero en los casos en que interesa conocer solamente los valores relativos de «I» se puede usar en vez de los términos « $\frac{EI}{a}$ », solamente los valores de «h^3» en igual forma para vigas y para losas;

b) Las rigideces.

La rigidez mínima « S_{min} » y la de un cierto borde de la losa pueden obtenerse directamente de las tablas del Capítulo V. La definición de la rigidez del borde determinado exige el conocimiento previo de los grados de empotramiento de los otros tres lados de la losa. En el caso en que todas las losas del conjunto tienen los mismos espesores se puede suponer con bastante precisión que los lados continuos tienen grados de empotramiento iguales a 0.50 (ver Capítulo V).

En el caso general, en el cual los espesores de las losas son diferentes, se pueden apreciar los grados de empotramiento en forma aproximada con una comprobación posterior de su valor efectivo. Hay que llamar la atención hacia el hecho de que una inexactitud en la apreciación de los grados de empotramiento influye relativamente poco sobre el valor de «S», lo que permite, despues de una corta práctica, apreciarlos con exactitud suficiente.

No debe exagerarse tampoco la exactitud en la interpolación de valores, al usar las tablas de rigideces, porque un pequeño error en el valor de «S» casi no afecta el valor de «f».

La rigidez de las vigas a torsión se calcula, en caso necesario, de acuerdo a la tabla del Capítulo VIII;

c) Los grados de empotramiento.

Los grados de empotramiento se obtienen una vez conocidas la rigidez mínima de la losa « S_{min} » y la suma de rigideces de los elementos adyacentes al borde considerado ΣS, usando la fórmula $f = \frac{\Sigma S}{\Sigma S + S_{min}}$.

d) Los coeficientes de transporte de los momentos C. O.

Los coeficientes de transporte de los momentos M′, M″ y M‴ se calculan según las tablas de los C. O. para determinados valores de «m» y f_b, f_c, f_d. La repartición de los momentos es la operación más larga del cálculo y antes de iniciarla es recomendable definir hasta qué punto se pueden despreciar las influencias de los momentos M″ y M‴ (ver Capítulos IX y X)

BIBLIOTECA CENTRAL DEPTO. DE FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

e) Los momentos de empotramiento elástico.

El cálculo de los momentos de empotramiento elástico fue tratado con suficiente amplitud en el Capítulo VII y puede realizarse en la mayoría de los casos usando las tablas.

Sería demasiado difícil indicar una regla rígida que sirviera para separar los casos en los cuales se puede despreciar el cálculo de M″ y M‴ de aquellos en que no puede hacerse, lo que depende en primer lugar del grado de exactitud deseada.

Las consideraciones generales en relación con este aspecto fueron indicadas ya en los Capítulos IX y X.

Con referencia al caso definido de la acción de una carga uniformemente repartida es posible limitarse, para un cálculo suficientemente aproximado, a la consideración de sólo los momentos M′.

Los momentos M″ en este caso no afectan al momento máximo de apoyo ni al del tramo (suponiendo M_{max} del tramo en el centro de la losa). El hecho de despreciar los momentos distribuídos según la tercera armónica M‴ produce, para los lados cortos de la losa, una pequeña disminución del momento máximo (del orden de un 5% como máximo); para los lados largos, el efecto es contrario, aumentándose el momento máximo de apoyo hasta un 13% ($m = 0.5\ M_a'''$).

Los momentos de apoyo definitivos pueden obtenerse también en la forma siguiente: Cargando todas las losas al mismo tiempo, en vez de cargar cada una separadamente y sumando los efectos parciales.

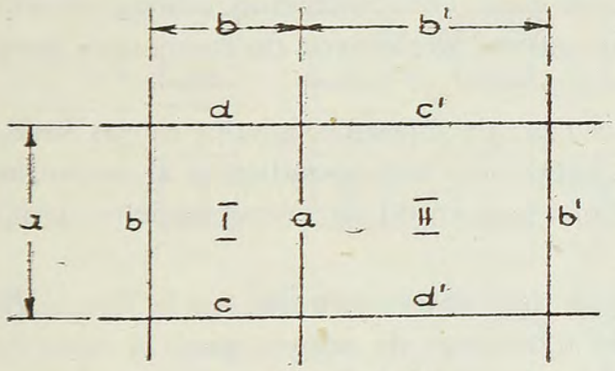


Fig. 28

En la figura 28 vemos dos losas I y II que forman parte de un campo de losas continuas. Supongamos en una primera etapa que a lo largo de todos los apoyos continuos tenemos vigas cuya rigidez a la torsión es infinitamente grande. En este caso todos los bordes de las losas I y II estarían perfectamente empotrados.

Cargando todas las losas al mismo tiempo se observa en el caso general, que los momentos de borde, común a dos losas vecinas, tienen valores diferentes.

En realidad una viga que absorba la diferencia total de los momentos no existe y el momento de apoyo desequilibrado debe repartirse en una cierta proporción entre las dos losas consideradas y la viga, a fin de restablecer el equilibrio (en caso de no considerar la acción de la viga la diferencia se reparte sólo entre las losas contiguas).

Entonces, para obtener los momentos de apoyo de un campo de losas cargadas, se superponen los momentos de empotramiento perfecto de la acción de la carga, con los momentos obtenidos por la acción de los momentos desequilibrados a lo largo de cada borde continuo, considerándolos como una carga exterior.

La repartición del momento desequilibrado entre los elementos que forman el nudo (dos losas y viga) se hace proporcionalmente a la rigidez de cada uno de ellos.

Para obtener con una sola repartición los momentos correctos se hace una repartición en función de las rigideces reales que se obtienen de la tabla de rigideces para determinados grados de empotramiento y relación de lados «m».

Volviendo al caso indicado en la fig. 28, vamos a calcular cómo se reparte el momento M_a' que actúa a lo largo del borde «a», entre las losas I, y II, bajo la suposición de que todas las losas del campo tienen los mismos espesores.

Todos los grados de empotramiento en este caso pueden tomarse igual a 0.50 y consultando las tablas de rigideces podemos ver que el valor de «S» varía entre

$$8.88 \frac{EI}{a} \quad \text{para } m = 0.50$$

$$\text{y} \quad 7.12 \frac{EI}{a} \quad \text{para } m \geqslant 1.20$$

valores que abarcan todas las variaciones posibles de $\frac{b}{a}$ y $\frac{b'}{a}$

Entonces el coeficente de repartición puede variar sólo entre

$$\frac{7.12}{7.12 + 8.88} = 0.445 \qquad m \geqslant 1.20$$

$$\text{y} \quad \frac{8.88}{7.12 + 8.88} = 0.555 \qquad m = 0.50$$

Como podemos observar la variación de los posibles coeficientes de repartición es tan pequeña que permite, en la mayoría de los casos, tomarlo sin cálculo previo igual a 0.50.

Transportando el momento repartido en esta forma, hacia los otros bordes b, c, d y b', c', d' y repitiendo la operación para cada momento desequilibrado consecutivo podemos obtener finalmente los valores definitivos de momentos para cada uno de los bordes (ver ejemplos 2 y 3).

Entonces para realizar el cálculo, en el caso de espesores iguales de las losas, bastaría conocer dos tipos de momentos de apoyo: los correspondientes al empotramiento perfecto ($f = 1$) y los correspondientes al grado de empotramiento igual a 0.50.

Para evitar la interpolación de valores de las tablas generales, en la figura 29 se presentan las curvas de variación de los momentos de apoyo, para el caso de acción de la carga uniformemente repartida para varias condiciones de borde.

El uso de las curvas es muy fácil como puede verse en el ejemplo 3.

Si las losas tienen espesores diferentes se calculan los coeficientes de repartición para cada caso particular separadamente usando las tablas de rigideces (ver ejemplo 2).

En los casos más frecuentes del cálculo de losas, los momentos desequilibrados son relativamente pequeños (las diferencias son menores que un 20%) lo que nos permite omitir el transporte de los momentos repartidos.

Así se puede llegar a una conclusión práctica muy importante y es que:

Para las losas de iguales espesores bajo la acción de las cargas permanentes, si no se toman en cuenta la resistencia de las vigas a torsión, los momentos de apoyos continuos, con muy pocas excepciones, serán iguales a la mitad de la suma de los momentos de apoyo de las dos losas vecinas, perfectamente empotradas a lo largo del borde considerado.

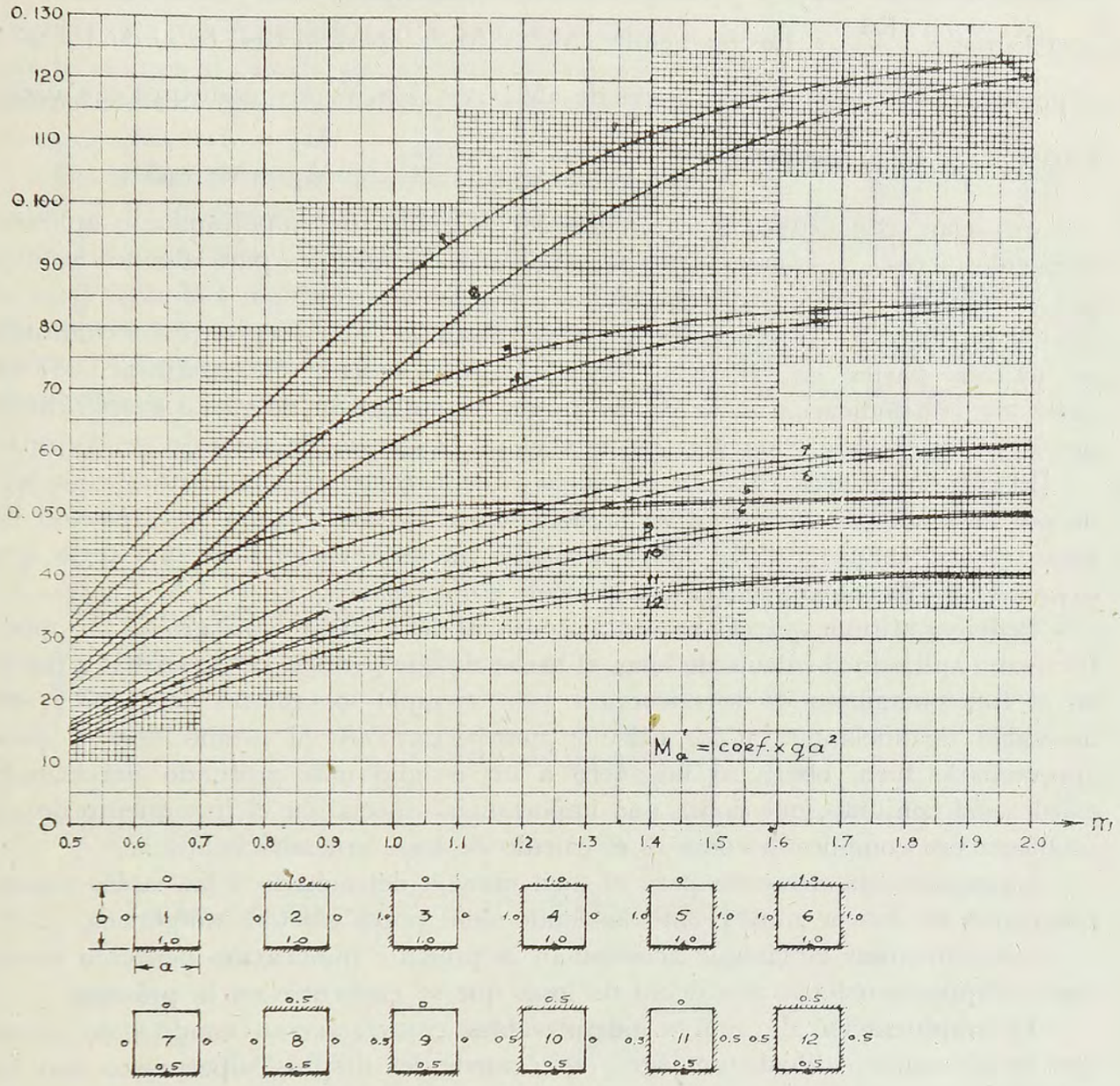


Fig. 29.

En los casos dudosos, en los cuales los momentos desequilibrados son grandes, se puede, mediante los coeficientes de transporte C. O. correspondientes, comprobar hasta qué punto se justifica la afirmación anterior.

El cálculo de losas según el último camino indicado conviene especialmente para los casos en que se trata de calcular un conjunto compuesto por gran número de losas con cargas y luces parecidas o también si hay un solo estado de cargas (por ejemplo la carga hidrostática en el caso de estanques).

APLICACION DEL METODO CUANDO $\mu \neq 0$.

Todo el desarrollo de cálculo expuesto está basado en la condición de que para el material de que están constituídas las losas el coeficiente recíproco de Poisson vale $\mu = 0$, pero con excepción de las tablas 4, 5 y la fig. 25. Los coe-

ficientes de todas las demás tablas mantienen su validez si reemplazamos en ellos el «EI» por «$\frac{EI}{1-\mu^2}$». Los momentos «M_x^o y M_y^o» para el caso en el cual $\mu \neq 0$ se pueden obtener usando los valores de «M_x» y «M_y», de los momentos calculados a base de $\mu = 0$ mediante las fórmulas siguientes: $M_x^o = M_x + \mu M_y$ y $M_y^o = M_y + \mu M_x$

Ya aclarado y explicado el método de los grados de empotramiento aplicado al cálculo de losas continuas, desearía explicar un hecho que, para algunos lectores que buscan en el presente trabajo una «receta» corta y bien definida, para el cálculo de los casos complicados de losas continuas, será sorpresivo, encontrarán en muchas partes las palabras "casos más frecuentes", "la mayoría de los casos, etc., sin indicación clara de los límites de aplicación de varias simplificaciones, dejando siempre abierta la posibilidad de existencia de un caso excepcional.

El cálculo de losas cruzadas continuas tratado correctamente es muy complejo de por sí y además concurren en él demasiadas variables como ser: relación de luces, cargas, condiciones de apoyo etc., que no permiten indicar una regla que sirva siempre para cualquier caso de cálculo sin excepción.

Podemos afirmar que es una ventaja especial del método de los grados de empotramiento aplicado al cálculo de losas, el hecho de que permita penetrar más a fondo en el funcionamiento de la estructura (por ejemplo los valores de C. O.), sin necesidad de adelantar en los cálculos numéricos. Pero al mismo tiempo, para aprovecharlo bien, obliga al ingeniero a un estudio más profundo del trabajo elástico del conjunto, que cobra una importancia especial en el tratamiento de un problema tan complicado como es el cálculo de losas cruzadas continuas.

La experiencia necesaria para el fácil manejo del método y las tablas correspondientes se obtiene muy pronto haciendo unos pocos cálculos numéricos.

Las numerosas tablas que acompañan la presente publicación permiten tratar casi cualquier problema de cálculo de losas que se encuentre en la práctica.

La consideración de apoyos indesplazables, caracteriza un estado base (igual que en el caso de cálculo de vigas) que puede ser después superpuesto con las influencias de asentamientos o aun falta de apoyos (aplicación de la carga a lo largo del apoyo en sentido opuesto e igual a la reacción calculada, en el caso del borde libre).

La solución de estos problemas también puede obtenerse usando el método de los grados de empotramiento, pero el tratamiento de este tema sale de los límites que hemos impuesto a la presente publicación.

EJEMPLOS

Ejemplo 1.

Para juzgar la exactitud del procedimiento ofrecido vamos a hacer algunos cálculos comparados con los que se pueden encontrar en los libros relacionados con la materia.

Una de las tablas más exactas, para el cálculo de losas cruzadas bajo la acción de una carga cualquiera, es la publicada por, el profesor Pucher, quien desarrolló las superficies de influencia de los momentos de empotramiento perfecto en el centro del borde y del tramo en una forma de muy fácil uso.

Las tablas de Pucher no permiten sin embargo calcular una losa continua; por lo tanto tendremos que limitarnos al cálculo comparativo de una losa aislada con diferentes condiciones de apoyo en los bordes.

En la fig. 30 vemos una losa cuadrada cuyo lado x = 0 está perfectamente empotrado y sus tres lados restantes están simplemente apoyados.

Calcularemos el valor del momento de apoyo del lado empotrado producido por los dos tipos de carga «q» indicadas en la fig. 30, con líneas llenas y de puntos.

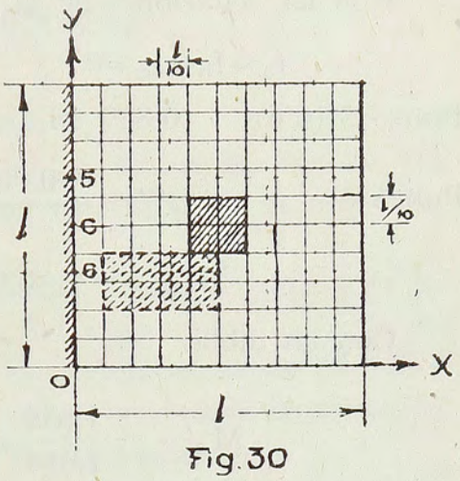


Fig. 30

Con tablas de Pucher el momento en el centro del borde empotrado vale:

$$M_{ap} = \mu \left(\frac{l_x}{10}\right)^2 \cdot \Sigma\, q_i \eta_i c_i$$

a) Primer caso de carga:

$$\mu = \frac{1}{8\,\pi} \quad \Sigma\, q_i \eta_i c_i = q\,(5.30 + 4.35) \times 2 = 19.30\ q$$

$$\text{y} \quad M_{ap} = \frac{1}{8\,\pi} \times 0.01 \times 19.30\ ql^2 = \underline{0.00768\ ql^2}$$

b) Segundo caso:

$$\mu = \frac{1}{8\,\pi} \quad \Sigma q_i \eta_i c_i = q(5.30 + 7.85 + 8.40 + \mathbf{7.85}) = 29.40\ q$$

$$\text{y} \quad M_{ap} = \frac{1}{8\,\pi} \times 0.01 \times 29.40\ q\ l^2 = \underline{0.0117\ ql^2}$$

Con el método propuesto obtendremos:

a) Primer caso de carga:

Los ángulos debidos a la carga son:

1ª Sinusoide (para m = 1).

$$\frac{2\,k\pi}{l}\ \varphi^o = (1.963 + 1.661)\ (0.9836 \times 2)\ ql^2\ 10^{-3} = 0.00713\ ql^2$$

3ª Sinusoide (tomada para m $\geqslant$ 0.60).

$$\frac{2\,k\pi}{l}\ \varphi^o = (0.040 + 0.012)\ (0.8584 \times 2) \times 10^{-3}\ ql^2 = 0.000089\ ql^2$$

Entonces

$$\frac{2\,k\pi}{l}\ \varphi_5{}^o = \frac{2\,k\pi}{l}\ \varphi_6{}^o = 0.00713 \times 0.866\ ql^2 = 0.00617\ ql^2$$

$$\frac{2\,k\pi}{l}\ \varphi_c{}^o = (0.00713 + 0.000089)\ q\ l^2 = 0.00722\ ql^2$$

Con las ecuaciones de la losa elásticamente empotrada para m = 1.0 y

$f_a = f_b = f_d = 0 \qquad f_c = 1.0$ se tendrá:

Punto 5 (ó 6) $\quad 0.849\ M_c' = -0.00617\ q\ l^2$ y $M_c' = -0.00727\ ql^2$

Punto c $\quad M_c''' = \dfrac{-0.00722 + 0.00727 \times 0.98}{0.333}\ q\ l^2 = -0.00030\ ql^2$

y $\quad M_{centro} = (-0.00727 - 0.00030)\ q\ l^2 = \underline{-\ 0.00757\ ql^2}$

Con las tablas

$$M_c' = -\frac{1.836}{1.559} \times 6.17 \times 10^{-3}\ q\ l^2 = -0\ 00727\ ql^2$$

b) Segundo caso de carga.

Los ángulos debidos a la carga son:

1ª Sinusoide

$$\frac{2\ k\pi}{l}\varphi^o = (1.757 + 2.148 + 2.174 + 1.963)\ (0.8873 + 0.7042) \times 10^{-3}\ q\ l^2 = 12.80 \times 10^{-3} ql^2$$

2ª Sinusoide

$$\frac{2\ k\pi}{l}\varphi^o = (0.572 + 0.515 + 0.388 + 0.266)\ (0.7958 + 0.9836) \times 10^{-3} ql^2 = 3.10 \times 10^{-3} ql^2$$

3ª Sinusoide

$$\frac{2\ k\pi}{l}\varphi^o = (0.239 + 0.158 + 0.086 + 0.040)(-0.6812 + 0.1507) \times 10^{-3} ql^2 =$$

$$= -0.277 \times 10^{-3} ql^2$$

Entonces

$$\frac{2\ k\pi}{l}\varphi_5^o = (12.80 - 3.10) \times 0.866 \times 10^{-3} ql^2 = 0.00840 ql^2$$

$$\frac{2\ k\pi}{l}\varphi_c^o = (12.80 - 0.277) \times 10^{-3} ql^2 = 0.01252 ql^2$$

$$\frac{2\ k\pi}{l}\varphi_6^o = (12.80 + 3.10) \times 0.866 \times 10^{-3} ql^2 = 0.01377\ ql^2$$

Con las ecuaciones de la losa elásticamente empotrada se tendrá:

Punto 5 $\quad 0.849\ M_c' - 0.433\ M_c'' = -0.00840 ql^2$

Punto c $\quad 0{,}980\ M_c' + 0.333\ M_c''' = -0.01252 ql^2$

Punto 6 $\quad 0.849\ M_c' + 0.433\ M_c'' = -0.01377 ql^2$

resolviendo estas ecuaciones obtendremos:

$M_c' = -0.01305 ql^2 \quad M_c'' = -0.00620 ql^2 \quad M_c''' = +0.00077 ql^2$

y $\quad M_{centro} = \underline{-0.01228\ ql^2}$

Empleando los coeficientes de las tablas se tendrá:

$$M_c' = -\frac{1.836}{1.559} \times \frac{8.40 + 13.77}{2} \times 10^{-3} ql^2 = -0.01305 ql^2$$

$$M_c'' = + \frac{0.936}{0.405} \times \frac{8.40 - 13.77}{2} \times 10^{-3} ql^2 = -0.00620 ql^2$$

Comparando los valores obtenidos por medio de las tablas de Pucher con los del método propuesto podemos ver que en el primer caso de carga la diferencia es sólo de un 1.4%, y en el segundo de un 4.9%.

El método propuesto tiene una ventaja en comparación con el empleo de las tablas de Pucher, pues nos da también la variación del momento a lo largo del borde, el que puede obtenerse sumando los valores correspondientes en un cierto punto de las tres armónicas componentes, lo cual tiene a veces suma importancia, especialmente en los casos de ubicación de carga en fuerte asimetría.

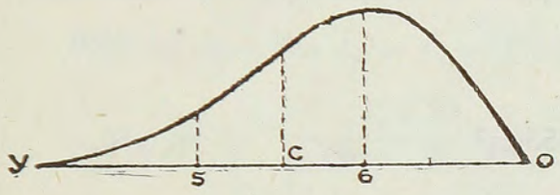


Fig. 31

Por ejemplo en el caso de la carga «b», sumando las influencias de n = 1, 2 y 3, obtendremos el diagrama de momentos indicado en la fig. 31, que nos muestra claramente que el máximo absoluto del momento no está en el centro del borde sino a una distancia de aproximadamente 0.3 1 cuyo valor es 36% mayor que el del momento en el centro.

Ejemplo 2.

Ahora trataremos el caso simple de tres losas continuas resuelto por Timoshenko [11] y Marcus [2]. En la fig. 32 vemos una corrida de tres losas cuadradas cuyos apoyos exteriores están simplemente apoyados, bajo acción de una cierta carga repartida «q».

Vamos a calcular este campo de losas dos veces cambiando las características elásticas de borde y las cargas.

1) Los espesores de todas las losas son iguales. Se calculan primeramente los grados de empotramiento. Con las tablas de rigideces para m = 1.0 S_{min} = 6.41.

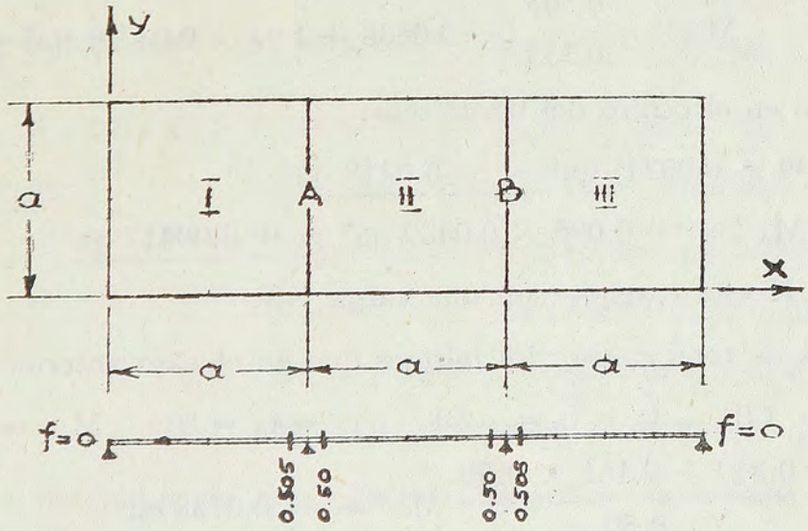


Fig. 32

$$S_{A\,I} = 6.41 \quad f_{A\,II} = \frac{6.41}{6.41+6.41} = 0.50$$

$$f_{B\,II} = f_{A\,II} = 0.50 \quad S_{A\,II} = 6.53$$

$$f_{A\,I} = \frac{6.53}{6.53+6.41} = 0.505$$

En este caso hay sólo un coeficiente de transporte C. O. AB = C. O. BA y de las tablas para los C. O., se obtendrá para m = 1.0

$$f_c = f_d = 0 \quad y \quad f_b = 0.50 \qquad C.\,O. = -0.095$$

a) La losa I está cargada con una carga «q».

De las tablas de superficies de influencia para la carga repartida tendremos:

1ª Sinusoide.

$$\frac{2\,k\pi}{a}\,\varphi^o = 13.391 \times 6.366 \times 10^{-3} qa^2 = 0.0853 qa^2$$

3ª Sinusoide.

$$\frac{2\,k\pi}{a}\,\varphi^o = -0.712 \times 2.122 \times 10^{-3} qa^2 = -0.00151\, qa^2$$

entonces $\frac{2\,k\pi}{a}\,\varphi_1^c = \frac{2\,k\pi}{a}\,\varphi_2^o = 0.866 \times 0.0853\, qa^2 = 0.0738\, qa^2$

$$\frac{2\,k\pi}{a}\,\varphi_a = (0.0853 - 0.00151)\, qa^2 = 0.0838\, qa^2$$

Aplicando las ecuaciones de la losa elásticamente empotrada para m = 1.00 y

$f_a = 0.505 \quad f_b = f_c = f_d = 0$ se tendrá:

Punto 1 (ó 2) $M_A' = -\frac{0.505}{0.849} \times 0.0738\, qa^2 = -0.0439\, qa^2$

Punto a $\quad M_A''' = \frac{0.505}{0.333}(-0.0838 + 1.94 \times 0.0439)\, qa^2 = +0.0021\, qa^2$

El momento en el centro del borde será:

$M_A = (-0.0439 + 0.0021)\, qa^2 = \underline{-0.0418\, qa^2}$

$M_B' = C.O_{AB}\; M_A' = +0.095 \times 0.0439\, qa^2 = \underline{+0.00417\, qa^2} \qquad M_B''' = 0$

b) La losa II está cargada con una carga «q».

Los ángulos de rotación son los mismos que en el caso anterior

$$m = 1.0 \qquad f_a = f_b = 0.50 \qquad f_c = f_d = 0 \qquad M_A = M_B$$

Punto 1 (ó 2) $\frac{0.849 + 0.161 \times 0.50}{0.50}\, M_A' = -0.0738\, qa^2$

$M_A' = -0.0397\, qa^2$

Punto a $M_A''' = \frac{0.50}{0.333} \left[(1.960 + 0.186)\ (+0.0397) - 0.0838 \right] qa^2 =$
$= + 0.0021\ qa^2$

entonces en el centro del borde se tendrá:

$$M_A = M_B = (-0.0397 + 0.0021)\ qa^2 = -0.0376\ qa^2$$

Los valores de momento de empotramiento elástico en el caso de acción de la carga repartida pueden obtenerse directamente de las tablas como se indica a continuación:

Para el caso «a» $f_a = 0.505$ $f_b = f_c = f_d = 0$ $m = 1.0$

$$M_A' = -\frac{135.50}{1.559} \times 0.505 \times 10^{-3}\ qa^2 = -0.0439\ qa^2$$

Para el caso «b» $f_a = f_b = 0.50$ $f_c = f_d = 0$ $m = 1.0$

$$M_A' = -\frac{122.70}{1.559 - 0.028 \times 0.50} \times 0.50 \times 10^{-3}\ qa^2 = -0.0397\ qa^2$$

como podemos ver la coincidencia es perfecta.

M_{max} de apoyo — Para obtener el máximo del momento de apoyo «A» se cargan solamente las losas I y II y se obtiene:

$$M_{A\ max} = (-0.0418 - 0.0376)\ qa^2 = \underline{-0.0794\ qa^2}$$

M_{max} del tramo I — Para obtener el máximo del momento del tramo I se cargan las losas I y III

$$M_A' = (-0.0439 + 0.0042)\ qa^2 = -0.0397\ qa^2$$

En una losa simplemente apoyada en el centro se tendrá

$M_x = M_y = 0.0368\ qa^2$

luego

$$M_x = (0.0368 - 0.056 \times 0.0397)\ qa^2 = \underline{0.0346\ qa^2}$$

y

$$M_y = (0.0368 - 0.144 \times 0.0397)\ qa^2 = \underline{0.0311\ qa^2}$$

M_{max} del tramo II. — Para obtener el máximo del momento en el tramo II se carga solamente la losa II

luego: $M_A' = M_B' = -0.0397\ qa^2$ y

$$M_x = (0.0368 - 0.056 \times 0.0397 \times 2)\ qa^2 = \underline{0.0324\ qa^2}$$

$$M_y = (0.0368 - 0.144 \times 0.0397 \times 2)\ qa^2 = \underline{0.0254\ qa^2}$$

Los valores obtenidos en este cálculo demuestran la coincidencia hasta un 1 a 2% con los obtenidos por Timoshenko y Marcus. Para cargas iguales sobre todas las losas, el cálculo corriente según Löser da también una diferencia de un

5% ya que el cálculo como una viga continua con repartición de las cargas en dos sentidos no se aleja más de un 10% del cálculo exacto. Como podemos ver en este caso todos los métodos pueden emplearse sin cometer un error apreciable.

Si las cargas son diferentes en varias losas, por ejemplo sobre las losas I y III son dos veces más grandes que sobre la losa II, el aspecto general cambia fundamentalmente. La carga adicional de las losas extremas produce un aumento de los momentos de apoyo cuya influencia sobre los momentos del tramo de las losas II no puede apreciarse correctamente cuando se efectúa el cálculo de la losa asimilándolas a vigas continuas (ver capítulo 1).

El cálculo de las losas como vigas cruzadas en este caso da un error considerable (hasta con el signo opuesto), los momentos en sentido «x» resultan demasiado pequeños y en el sentido «y» demasiado grandes.

2) Consideremos ahora el caso en que los espesores de las losas y las cargas son distintos, tomando además en cuenta la resistencia a la torsión de las vigas, con los siguientes datos:

a = 5.00 m. Losas I y III con cargas repartidas g = 500 kg/m² p = 500 kg/m².

Considerando además que sobre las losas actúa la carga de un muro de 25 cms. de espesor con q = 1.600 kg/m. (ver fig. 33).

Sobre la losa II actúan solamente las cargas repartidas g = 350 kg/m² y p = 250 kg/m².

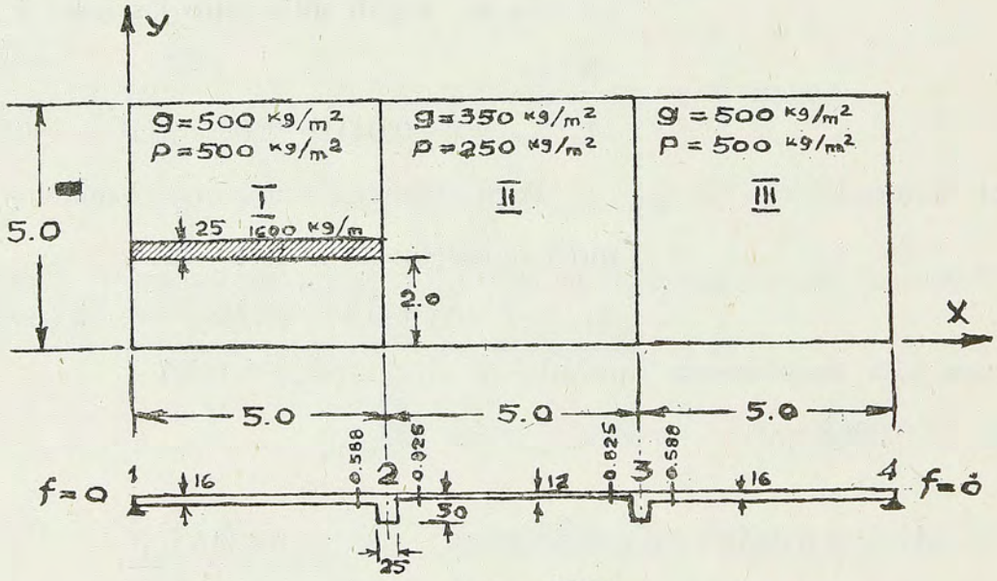


Fig. 33

Los espesores de las losas I y III son de 16 cms. y de la losa II de 12 cms.

Las losas tienen sus bordes exteriores simplemente apoyados y los intermedios apoyados sobre vigas de concreto armado de sección b/h = 25/50 cms. cuyos extremos están simplemente apoyados para la flexión y perfectamente empotrados para la torsión.

Cálculo de los grados de empotramiento: $I^* = \frac{12}{b} I$

Losas I y II $I^* = 1.6^3 = 4.10$ Losa II $I^* = 1.2^3 = 1.73$

Vigas $I^* = 2.5^3 = 15.63$

Para obtener el grado de empotramiento «$f_{2\,II}$» del lado «2» de la losa «II», se necesita saber la suma de las rigideces de la losa «I» — «$S_{2\,I}$» y de la viga «S_v», y la rigidez mínima de la losa «II».

De las tablas de rigideces para losas si m = 1.0 $f_b = f_c = f_d = 0$

$$\frac{a}{E} S_{2\,I} = 6.41 \times 4.10 = 26.30 \qquad \frac{a}{E} S_{II\,min} = 6.41 \times 1.73 = 11.09$$

De la curva de la rigidez de las vigas a torsión, para $m = \frac{b}{a} = \frac{50-6}{500} = 0.088$

$$\frac{a}{E} S_v = 1.67 \times 15.63 = 26.10$$

Entonces

$$\Sigma S = 26.30 + 26.10 = 52.40 \text{ y } f_{2\,II} = \frac{52.40}{52.40 + 11.09} = \underline{0.825}$$

Para el grado de empotramiento de la losa «III» — «$f_{3\,III}$» se define la rigidez de la losa II, si m = 1.0 $f_b = 0.825$ $f_c = f_d = 0$

$$\frac{a}{E} S_{3\,II} = 6.63 \times 1.73 = 11.47 \qquad \Sigma S = 11.47 + 26.10 = 37.57$$

$$\frac{a}{E} S_{III\,min} = 6.41 \times 4.10 = 26.27 \text{ y } f_{3\,III} = \frac{37.57}{37.57 + 26.27} = \underline{0.588}$$

Por simetría

$$f_{3\,II} = f_{2\,II} = 0.825 \quad \text{y} \quad f_{2\,I} = f_{3\,III} = 0.588$$

Los coeficientes de transporte del momento $C.O_{23} = C.O._{32} = -0.157$ (ver las tablas de los C.O. para «M'_b» cuando m = 1.0 $f_b = 0.825$ $f_c = f_d = 0$).

Los ángulos de rotación se calculan solamente para la carga del muro, porque para la carga repartida se toman los valores de los momentos directamente de las tablas.

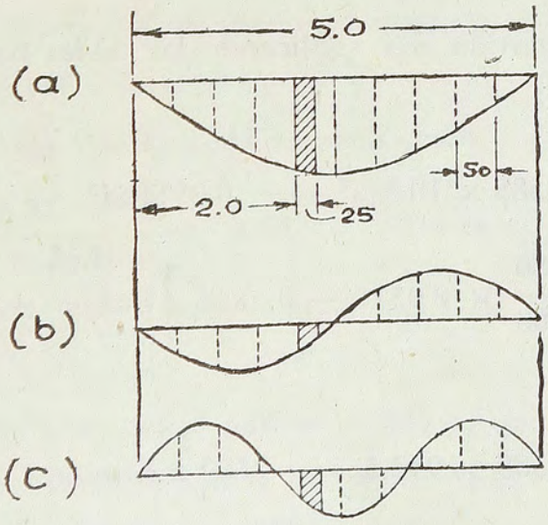


Fig. 34

Entonces para $q = 1.600$ kg/m ó $\frac{1600}{0.25} = 6.400$ kg/m² se tendrá:

En sentido «x» la carga ocupa todo el largo de la losa y en sentido «y» según se indica en la fig.

La primera armónica (fig. 34a).

$$\frac{2k\pi}{a}\varphi^{o}_{max} = 13.391 \times 0.9836 \times \frac{0.25}{0.50} \times 10^{-3} \times 6400 \times 5.0^{2} = 1054 \text{ kg. m}$$

La segunda armónica (fig. 34b).

$$\frac{2k\pi}{a}\varphi^{o}_{max} = 2.440 \times 0.304 \times \frac{0.25}{0.50} \times 10^{-3} \times 6400 \times 5.0^{2} = 59.3 \text{ kg. m.}$$

La tercera armónica (fig. 34c).

$$\frac{2k\pi}{a}\varphi^{o}_{max} = 0.712\ 0.8584 \times \frac{0.25}{0.50} \times 10^{-3} \times 6400 \times 5.0^{2} = 48.9 \text{ kg. m.}$$

y $$\frac{2k\pi}{a}\varphi_{a}^{o} = 1054 + 48.9 \simeq 1103 \text{ kg. m.}$$

$$\frac{2k\pi}{a}\varphi_{1}^{o} = (1054 + 59.3) \times 0.866 = 964 \text{ kg. m.}$$

$$\frac{2k\pi}{a}\varphi_{2}^{o} = (1054 - 59.3) \times 0.866 = 861 \text{ kg. m.}$$

$$\frac{2k\pi}{a}\left(\frac{\varphi_{1}^{o} + \varphi_{2}^{o}}{2}\right) = 912.5 \text{ kg.m.}$$

$$\frac{2k\pi}{a}\left(\frac{\varphi_{1}^{o} - \varphi_{2}^{o}}{2}\right) = 51.5 \text{ kg.m.}$$

Momentos de empotramiento elástico de las losas

Losa I.

a) De la carga repartida «q» (aplicando las tablas para $m = 1.0$ $f_a = 0.588$ y $f_b = f_c = f_d = 0$)

$$M_a' = -\frac{135.54}{1.559} \times 0.588 \times 10^{-3} qa^2 = -0.0511 qa^2$$

$$M_a''' = \frac{0.588}{0.333}\left[+\frac{0.980}{0.588} \times 0.0511 - 0.0838\right] qa^2 = +0.0025\, qa^2$$

b) Del muro.

$$M_a' = -\frac{1.836}{1.559} \times 0.588 \times 912.5 = -632 \text{ kg. m.}$$

$$M_a''' = \frac{0.588}{0.333}\left[-1103 + \frac{0.980}{0.588} \times 632\right] = -88 \text{ kg. m.}$$

$$M_a'' = -\frac{0.936}{0.405} \times 0.588 \times 51.5 = -70 \text{ kg. m.}$$

Losa II.

De la carga repartida; $m = 1.0$ $\quad f_a = f_b = 0.825$ $\quad f_c = f_d = 0$

$$M_a' = M_b' = -\frac{114.40}{1.559 - 0.046 \times 0.825} 0.825 \times 10^{-3} qa^2 = -0.0621\, qa^2$$

$$M_a''' = M_b''' = \frac{0.825}{0.333}\left[\frac{0.980 + 0.186 \times 0.825}{0.825} \times 0.0621 - 0.0838\right] qa^2 =$$

$$= +0.0035\, qa^2$$

Cargas permanentes sobre las losas.

a) Cargada la losa I.

$M_{2\,I}' = -0.0511 \times 500 \times 5.0^2 = -639$ kg. m.

$M_{2\,I}''' = +0.0025 \times 500 \times 5.0^2 = +31$ kg. m. (carga repartida)

$M_{2\,I}' = -632$ kg. m. $\quad M_{2\,I}'' = -70$ kg.m. $\quad M_{2\,I}''' = -88$ kg. (carga del muro)

Entonces sumando se tendrá: $M_{2\,I}' = -1271$ kg. m. $\quad M_{2\,I}'' = -70$ kg. m.
$M_{2\,I}''' = -57$ kg. m.

Estos momentos se reparten entre viga y la losa II.

Para la losa $\dfrac{S_{2\,II}}{S_{2\,II} + S_v} = \dfrac{11.47}{11.47 + 26.10} = 0.305$

Para la viga $\dfrac{S_v}{S_{2\,II} + S_v} = \dfrac{26.10}{11.47 + 26.10} = 0.695$

Entonces en la losa II los momentos de apoyo 2 de la carga sobre la losa I serán:

$M_{2\,II}' = 0.305 \times (-1271) = -388$ kg. m. $\quad M_{2\,II}'' = 0.305\,(-70) = -21$ kg. m

$M_{2\,II}''' = 0.305 \times (-57) = -17$ kg. m.

hacia el borde «3» se transporta solamente el momento «M_2'».

$M_{3\,II}' = -388 \times (-0.157) = +61$ kg. m

que se reparte entre la viga y la losa III en proporción para la losa

$$\frac{S_{3\,III}}{S_{3\,III} + S_v} = \frac{26.27}{26.27 + 26.10} = 0.502 \text{ y para la viga } 0.498.$$

Entonces en la losa III el momento $M_{3\,III}' = +61 \times 0.502 = +31$ kg. m.

b) Cargada la losa. II

$M_{2\,II}' = M_{3\,II}' = -0.0621 \times 350 \times 5.0^2 = -544$ kg. m.

$M_{2\,II}''' = M_{3\,II}''' = +0.0035 \times 350 \times 5.0^2 = +31$ kg. m.

$M_{2\,I}' = M_{3\,III}' = -544 \times 0.502 = -273$ kg. m.

$M_{2\,I}''' = M_{3\,III}''' = \; = +31 \times 0.502 = +16$ kg. m.

c) Si cargamos la losa III, por la simetría de las cargas y las condiciones de empotramiento, los momentos «M_3» serán iguales a «M_2» del caso «a» y a la inversa.

Entonces en el caso de las cargas permanentes

$M_{2\,I}' = M_{3\,III}' = -1271 - 273 + 31 = -1513$ kg. m. $M_{2\,I}'' = M_{3\,III}'' = -70$ kg. m. $M_{2\,I}''' = M_{3\,III}''' = -57 + 16 = -41$ kg. m. $M_{2\,II}' = M_{3\,II}' = -544 - 388 + 61 = -871$ kg. m. $M_{2\,II}'' = M_{3\,II}'' = -21$ kg. m. $M_{2\,II}''' = M_{3\,II}''' = +31 - 17 = +14$ kg. m.

La diferencia entre «$M_{2\,I}$ = » y «$M_{2\,II}$» y también entre «$M_{3\,II}$» y «$M_{3\,III}$» está tomada por la torsión de la viga.

Influencia de las sobrecargas.

a) Carga sobre la losa I (ó III).

$M_{2\,I}' = -639$ kg. m. $M_{2\,I}''' = +31$ kg. m. («p» es igual a «g»)

b) Carga sobre la losa II.

$M_{2\,II}' = M_{3\,II}' = -0.0621 \times 250 \times 5.0^2 = -388$ kg. m.

$M_{2\,II}''' = M_{3\,II}''' = +0.0035 \times 250 \times 5.0^2 = +22$ kg. m.

La repartición de los momentos hacia las losas descargadas está hecha directamente en la tabla siguiente:

Cargo	Nº de losa	Tipo de M	Losa I		Losa II		Losa III	
			0 <—	0.502 <—	—0.157 —> 0.305 <—	—> 0.305 <—	—> 0.502	—> 0
Carga «g»	I	M′	0	—1271	—388	+61	+31	0
		M″	0	—70	—21	0	0	0
		M‴	0	—57	—17	0	0	0
	II	M′	0	—273	—544	—544	—273	0
		M‴	0	+16	+31	+31	+16	0
	III	M′	0	+31	+61	—388	—1271	0
		M″	0	0	0	—21	—70	0
		M‴	0	0	0	—17	—57	0
Carga «p»	I	M′	0	—639	—195	+31	+15	0
		M‴	0	+31	+10	0	0	0
	II	M′	0	—195	—388	—388	—195	0
		M‴	0	+11	+22	+22	+11	0
	III	M′	0	+15	+31	—195	—639	0
		M‴	0	0	0	+10	+31	0

Debido a la influencia de la sobrecarga los momentos quedan en la forma siguiente:

max $M_{2I}' =$ max $M_{3III}' = -1513 - 834 = -2347$ kg. m.

max $M_{2II}' =$ max $M_{3II}' = -871 - 583 = -1454$ kg. m.

Los momentos según la segunda y tercera armónica son demasiado pequeños para tomarlos en cuenta.

El momento máximo de torsión en el apoyo de la viga valdrá:

$$M_{tors} = (2152 - 1066) \times \frac{5.0}{3.14} = 1728 \text{ kg. m.}$$

El momento máximo del tramo de las losas I y III se calcula en la forma siguiente:.

De la carga repartida para la losa simplemente apoyada se tiene:

$$M_y{}^{o}{}_{tr} = M_y{}^{o}{}_{tr} = 0.0368 \times 1000 \times 5.0^2 = + 920 \text{ kg. m.}$$

De la carga del muro, para la losa simplemente apoyada según las tablas de Pucher se tendrá:

$$M_y{}^{o}{}_{tr} = \frac{1}{8\,\pi} \times 21.90 \times 0.01 \times 6400 \times 0.5 \times 5.0^2 = 698 \text{ kg. m,}$$

$$M_x{}^{o}{}_{tr} = \frac{1}{8\,\pi} \times 13.90 \times 0.01 \times 6400 \times 0.5 \times 5.0^2 = 442 \text{ kg. m.}$$

Entonces los momentos del tramo, en el centro de las losas I y III serán:

$$M_{x\,max} = + 920 + 442 - (2137 \times 0.056) = \underline{+ 1242 \text{ kg. m.}}$$

$$M_{y\,max} = + 920 + 698 - (2137 \times 0.144) = \underline{+ 1310 \text{ kg. m.}}$$

El momento máximo del tramo en la losa II será:

$$M_x{}^{o}{}_{tr} = M_y{}^{o}{}_{tr} = 0.0368 \times 600 \times 5.0^2 = + 552 \text{ kg. m.}$$

$$M_{x\,max} = + 552 - (1259 \times 0.056 \times 2). = \underline{+ 411 \text{ kg. m.}}$$

$$M_{y\,max} = + 552 - (1259 \times 0.144 \times 2) = \underline{+ 189 \text{ kg. m.}}$$

El momento mínimo del tramo de la losa II será:

$$M^{o}{}_{x\,tr} = M_y{}^{o}{}_{tr} = 0.0368 \times 350 \times 5{,}0^2 = + 322 \text{ kg. m.}$$

$$M_{x\,min} = + 322 - (1035 \times 0.056 \times 2) = \underline{+ 206 \text{ kg. m.}}$$

$$M_{y\,min} = + 322 - (1035 \times 0.144 \times 2) = \underline{+ 24 \text{ kg. m.}}$$

momento negativo no se produce.

El mismo ejemplo puede calcularse de otra manera cargando todas las losas al mismo tiempo.

Para mostrar la forma de operar en este caso vamos a calcular los momentos «M'» debido a un solo estado de cargas, la carga «g» sobre todas las losas.

Para este cálculo pueden aprovecharse las rigideces y los « φ^{o} » anotados anteriormente.

Suponiendo que todos los lados continuos tienen empotramiento perfecto se tendrá:

a) Carga «g» en las losas I y III. (caso 1 de la fig. 29).

$$M_2' = M_3' = - 0.0867 \times 500 \times 5.0^2 = - 1084 \text{ kg. m.}$$

b) Carga «g» en la losa II. (caso 2 de la fig. 29).

$$M_2' = M_3' = - 0.0730 \times 350 \times 5.0^2 = - 639 \text{ kg. m.}$$

c) Carga del muro q = 1.600 kg./m. en las losas I y III.

$$M_2' = M_3' = -\frac{1.836}{1.559} \times 912.5 = -1074 \text{ kg. m.}$$

De la acción de todas estas cargas, en los apoyos 2 y 3 aparecen momentos desequilibrados en la arista.

$$\triangle M_2' = \triangle M_3' = (1084 + 1074) - 639 = 1519 \text{ kg. m.}$$

que debe repartirse entre las losas y vigas concurrentes.

Repartición del momento en el apoyo «2».

La Rigideces son:

$S_{2\,I} = 26.30$

$S_V = 26.10$ y $\Sigma S = 63.87$

$S_{2\,II} = 11.47$

Los coeficientes de repartición serán:

$$K_{2\,I} = \frac{26.30}{63.87} = 0.412 \quad K_V = \frac{26.10}{63.87} = 0.409 \quad K_{2\,II} = \frac{11.47}{63.87} = 0.179$$

y entonces los momentos repartidos serán:

$M_{2\,I}' = +\ 0.412 \times 1519 = +\ 626$ kg. m.

$M_V' = 0.409 \times 1519 = 621$ kg. m.

$M_{2\,II}' = -\ 0.179 \times 1519 = -\ 272$ kg. m.

El momento « $M_{2\,II}'$ » se transporta hacia el borde «3»

$M_{3\,II}' = +\ 0.157 \times 272 = +\ 43$ kg. m.

repartiéndose a su vez entre la viga y la losa III

$$M_{3III}' = \frac{26.30}{26.30+26.10} \times 43 = +\ 21 \text{ kg. m.}$$

La repartición del momento «$\triangle M_3'$» es igual a la del momento «$\triangle M_2'$» por simetría y en definitiva quedará:

$M_{2\,I}' = M_{3III}' = -\ 1084 - 1074 + 626 + 21 = -\ 1511$ kg. m.

$M_{2\,II}' = M_{3\,II}' = -\ 639 - 272 + 43 = -\ 868$ kg. m.

$M_V = 621 + 22 = 643$ kg. m. (torsión).

Los momentos obtenidos con este procedimiento coinciden perfectamente con los del cálculo anterior.

Ejemplo 3

Aplicaremos el procedimiento aproximado al cálculo del conjunto de losas según la figura 35.

El ejemplo está tomado del libro del profesor Löser.

Cargas peso propio	420 kg/m²	g = 420 kg/m²
sobrecarga	500 kg/m²	p 500 kg/m²
	920 kg/m²	

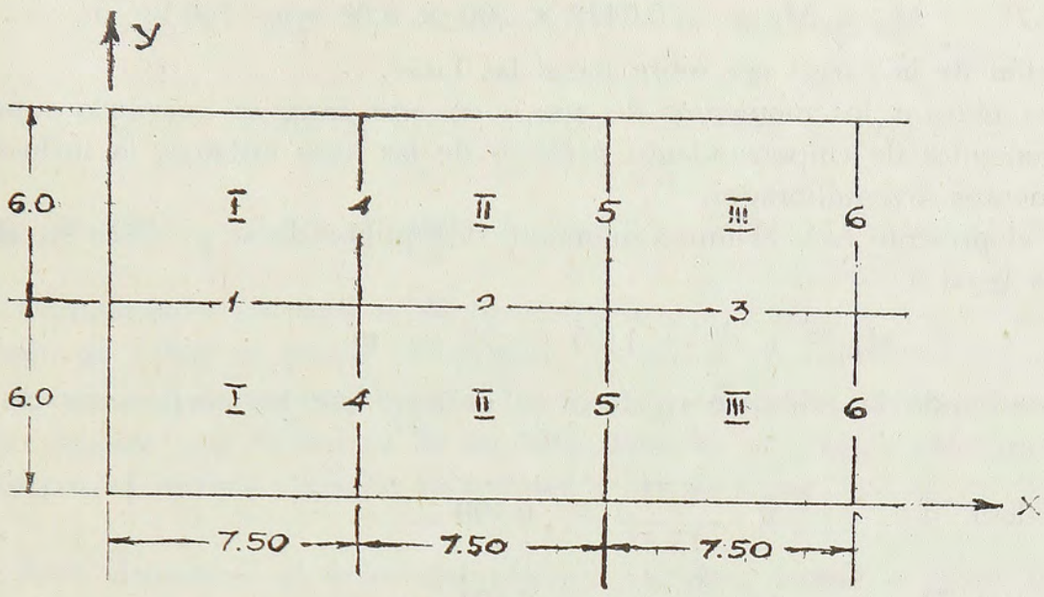


Fig 35

Todos los espesores de las losas son iguales.

Los apoyos exteriores están simplemente apoyados.

Para las losas de igual espesor, sin tomar en cuenta la resistencia de las vigas a torsión, se puede suponer el grado de empotramiento de todos los lados continuos igual a 0,50.

Cálculo de los momentos en las losas aisladas con el uso del gráfico de la figura 29.

a) Losa I.

Para la acción de la carga «g» se toma el empotramiento perfecto de los lados «1» y «4» (caso 3).

$$m_1 = \frac{6.0}{7.5} = 0.80 \qquad M_1 = -0.0572 \times 420 \times 7.50^2 = -1350 \text{ kg. m.}$$

$$m_2 = \frac{7.5}{6.0} = 1.25 \qquad M_4 = -0.0778 \times 420 \times 6.0^2 = -1177 \text{ kg. m.}$$

Para la acción de la carga «p» se toma para los lados «1» y «4» los grados de empotramiento efectivos, en el presente caso 0.50 (caso 9).

$$m_1 = 0.80 \qquad M_1 = -0\,0304 \times 500 \times 7.5^2 = -854 \text{ kg. m.}$$

$$m_2 = 1.25 \qquad M_4 = -0.0440 \times 500 \times 6.0^2 = -792 \text{ kg. m.}$$

b) Losas II y III.

Para la acción de la carga «g» se toma el empotramiento perfecto de los lados «2», «4» y «5» (casos 5 y 4).

$$m_1 = 0.80 \qquad M_2 = -0\,0460 \times 420 \times 7.50^2 = -1087 \text{ kg. m.}$$

$$m_2 = 1.25 \qquad M_4 = M_5 = -0.073 \times 420 \times 6.0^2 = -1105 \text{ kg.m.}$$

Para la acción de la carga «p» los grados de empotramiento de los lados «2», «4» y «5» son iguales a 0.50 (casos 11 y 10).

$$m_1 = 0.80 \qquad M_2 = -0.0272 \times 500 \times 7.5^2 = -764 \text{ kg. m.}$$

$m_2 = 1.25 \qquad M_4 = M_5 = -0.0422 \times 500 \times 6.0^2 = -760$ kg. m.

Acción de la carga «g» sobre todas las losas.

Para obtener los momentos de apoyo en este caso, es necesario superponer a los momentos de empotramiento perfecto de las losas aisladas, la influencia de los momentos desequilibrados.

En el presente caso el único momento desequilibrado se porduce en el apoyo «4» y es igual a

$$\triangle M_4 = 1177 - 1105 = 72 \text{ kg. m.}$$

Consultando la tabla de rigideces se obtiene que los coeficientes de repartición son:

Para la losa I $\qquad k = \dfrac{6.71}{13.45} = 0.499$

Para la losa II $\qquad k = \dfrac{6\ 74}{13.45} = 0.501$

Lo que nos demuestra una vez más la posibilidad, para losas de iguales espesores, de tomar el coeficiente de repartición sin cálculo previo igual a 0.50.

La magnitud del momento «$\triangle M_4$» no justifica tampoco transporte alguno del momento hacia los lados «1», «2» y«5».

Entonces los momentos de apoyo pueden escribirse

$M_1 = -1350$ kg. m. $\qquad M_2 = M_3 = -1087$ kg. m.

$M_4 = -\dfrac{1177+1105}{2} = -1141$ kg. m. $\qquad M_5 = M_6 = -1105$ kg. m.

Los momentos máximos de apoyo

$M_{1\,max} - 1350 - 854 \times 2 = -3058$ kg. m.

$M_{2\,max} = M_{3\,max} = -1087 - 764 \times 2 = -2615$ kg. m.

$M_{4\,max} = -1141 - 792 - 760 = -2693$ kg. m.

$M_{5\,max} = -1105 - 760 \times 2 = -2625$ kg. m.

Los momentos máximos del tramo.

Los momentos del tramo en una losa simplemente apoyada deducidos de los valores indicados en las curvas de la figura 25 serán:

$M_x^o = 0.0337 \times 920 \times 6.0^2 = 1116$ kg. m.

$M_y^o = 0.0557 \times 920 \times 6.0^2 = 1843$ kg. m.

Mtr. máx. en la losa I

$M_1 = -1350 - 854 = -2204$ kg. m $\qquad M_4 = -1141 - 792 = -1933$ kg. m.

aprovechando las tablas 4 y 5 se tendrá:

$M_{tr.\,x} = 1116 - 0.007 \times 1933 - 0.142 \times 2204 = 789$ kg. m.

$M_{tr.\,y} = 1843 - 0.129 \times 1933 - 0.123 \times 2204 = 1323$ kg. m.

Mtr. máx. en las losas II y III

$M_2 = -1087 - 764 = -1851$ kg. m. $\qquad M_4 = -1141 - 760 = -1901$ kg. m.

$$M_5 = -1105 - 760 = -1865 \text{ kg. m.}$$

$$M_{tr.\,x} = 1116 - 0.007 \times (1901 + 1865) - 0.142 \times 1851 = 827 \text{ kg. m.}$$

$$M_{tr.\,y} = 1843 - 0.129 \times (1901 + 1865) - 0.123 \times 1851 = 1129 \text{ kg. m.}$$

Comparando los valores de los momentos obtenidos con los calculados por método de Löser se puede comprobar que todos los momentos de apoyos y de los tramos, con excepción de los «M_4» y «M_5», coinciden bastante bien mostrando como máximo una diferencia de un 10%. Pero los momentos «M_4» y «M_5» calculados por el método ofrecido sobrepasan a los de Löser casi en un 50%.

Para demostrar el error del cálculo de Löser vamos a hacer un pequeño cálculo auxiliar:

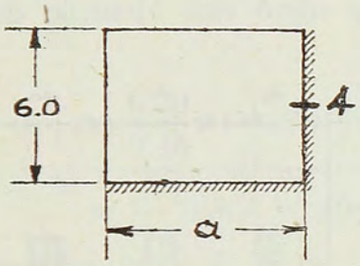


Fig. 36

Calcularemos con las tablas de Löser el valor del momento de apoyo «4» de la losa indicada en la figura 36 para tres casos diferentes variando el largo del lado «a» a = 6.0; 7.5 y 10.0 m.

$$a = 6.0 \text{ m.} \qquad m = 1.0 \qquad M_4 = -\frac{1}{8} \times 0.50\,q \times 6.0^2 = -2.25\,q$$

$$a = 7.5 \text{ m.} \qquad m = 0.8 \qquad M_4 = -\frac{1}{8} \times 0.2906\,q \times 7.5^2 = -2.044\,q$$

$$a = 10.0 \text{ m.} \qquad m = 0.6 \qquad M_4 = -\frac{1}{8} \times 0.1147\,q \times 10.0^2 = -1.433\,q$$

El análisis del cálculo hecho nos lleva a una conclusión sorpresiva ya que el aumento de las dimensiones de la losa disminuye el momento de apoyo, el cual debería aumentar hasta llegar a un valor máximo independiente de la variación de «a».

Este error proviene del método de repartición de las cargas en dos sentidos basado en la condición de igualdad de las flechas en el centro. Con el aumento de «a» la carga en el sentido considerado disminuye según la relación de las cuartas potencias de las luces mientras que el momento aumenta solamente con el cuadrado de la luz.

Las reacciones de la losa en este mismo sentido calculadas a base de los coeficientes de repartición de cargas según las tablas de Löser acusan errores aún más grandes, ya que ellas varían solamente en relación directa con la luz.

Ejemplo 4

En la figura 37 vemos un sistema de seis losas continuas de concreto armado que forman el tablero de un puente metálico. Los lados exteriores de este conjunto están simplemente apoyados y los lados interiores se apoyan sobre las vigas metálicas cuya resistencia a torsión es igual a 0.

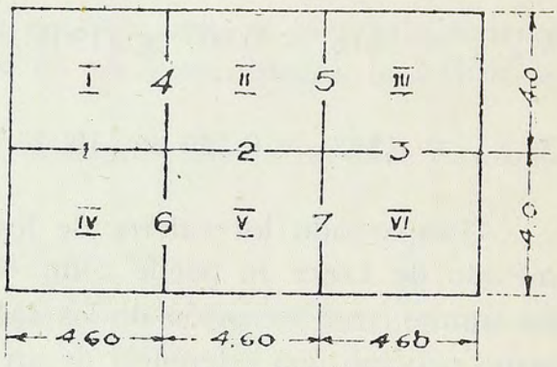


Fig. 37

Analizaremos los momentos de apoyo de las losas que forman el conjunto bajo la acción de la carga de un vehículo de 60 t. de tres ejes colocados sobre la losa en la posición indicada en la figura 38, la carga por m². correspondiente a cada rueda la designaremos por «q».

A fin de poder comparar los valores finales se tomó este ejemplo del libro del Dr. Fischer [8], pág. 47.

Para obtener el fin que nos proponemos debemos basarnos en las mismas suposiciones aproximadas hechas por él que consisten en despreciar la existencia de losas IV y VI para los efectos de la carga sobre la losa II.

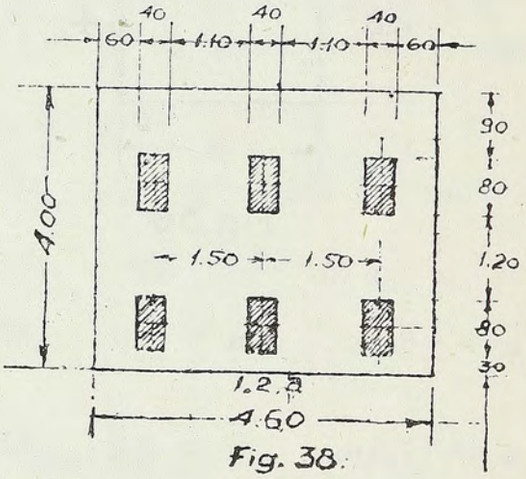


Fig. 38.

Más adelante haremos el cálculo sin esta suposición simplificatoria, analizando además el efecto de la carga sobre las losas IV y VI y su influencia sobre el momento positivo de la losa II.

Los ángulos de rotación debidos a la carga.

Para los lados 1, 2 y 3 serán:

$$m = \frac{b}{a} = \frac{4.00}{4.60} = 0.87 \qquad \frac{a}{10} = 0.46 \text{ m.}$$

Valor de la deformación según la primera armónica (interpolando entre m = 0.8 y m = 0.9) (fig. 39) tendremos:

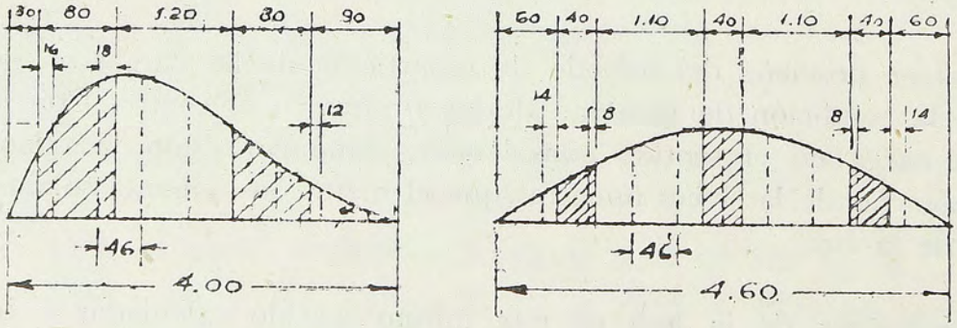


Fig. 39

$$\frac{2k\pi}{a} \varphi^{\circ}_{I} = \left(0.680 \times \frac{0.16}{0.46} + 1.711 + 2.059 \times \frac{0.18}{0.46} + 1.386 + 0.972 \times\right.$$

$$\times \frac{0.34}{0.46}\Big) \times \Big(0.9836 \times \frac{0.20}{0.46} + 0.7042 \times \frac{0.08}{0.46} + 0.4521 \times$$

$$\times \frac{0.32}{0.46}\Big) \times 2 \times 10^{-3}\, qa^2 = 4.858 \times 1.729 \times 10^{-3}\, qa^2 = 8.40 \times 10^{-3}\, qa^2$$

Valor de la deformación según la tercera armónica ($m \geqslant 0.60$) (fig. 40).

$$\frac{2k\pi}{a}\, \varphi^{o}_{III} = \Big(0.177 \times \frac{0.16}{0.46} + 0.239 + 0.158 \times \frac{0.18}{0.46} + 0.012\Big) \times \Big(0.8584 \times$$

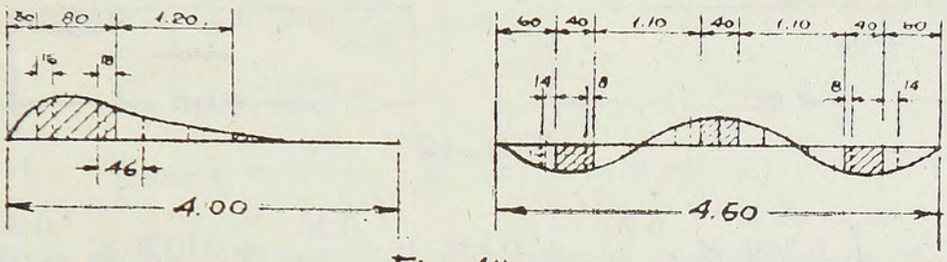


Fig. 40

$$\times \frac{0.20}{0.46} - 0.9515 \times \frac{0.32}{0.46} - 0.6812 \times \frac{0.08}{0.46}\Big) \times 2 \times 10^{-3}\, qa^2 =$$

$$= -0.304 \times 10^{-3}\, qa^2$$

Para los lados 4, 5, 6, 7 se obtendrá:

$$m = \frac{b}{a} = \frac{4.60}{4.00} = 1.15 \qquad \frac{a}{10} = 0.40\ m.$$

Valor de la deformación según la primera armónica (interpolando entre $m = 1.10$ y $m = 1.20$) (fig. 41).

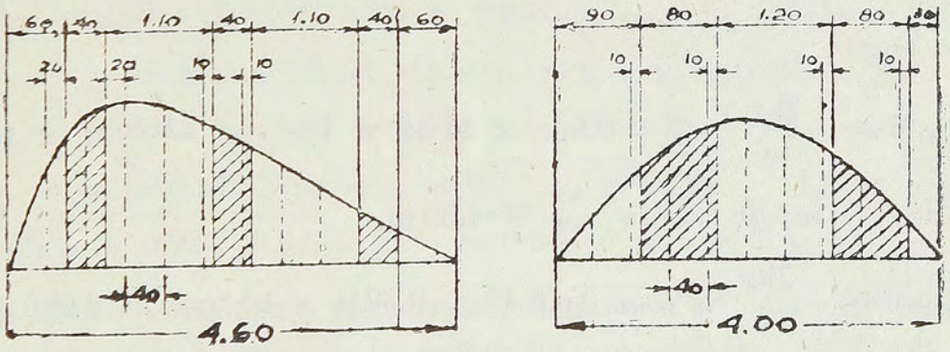


Fig. 41

$$\frac{2k\pi}{a}\, \varphi^{o}_{I} = \Big(1.786 \times \frac{0.20}{0.40} + 2.203 \times \frac{0.20}{0.40} + 1.804 \times \frac{0.30}{0.40} + 1.496 \times$$

$$\times \frac{0.10}{0.40} + 0.562\Big) \times \Big(0.7042 \times \frac{0.30}{0.40} + 0.8873 + 0.9836 \times$$

$$\times \frac{0.10}{0.40} + 0.7042 \times \frac{0.30}{0.40} + 0.4521 + 0.1558 \times \frac{0.10}{0.40}\Big) \times$$

$$\times 10^{-3}\, qa^2 = 11.48 \times 10^{-3}\, qa^2$$

La distancia entre los ejes de carga es 2.00 m. y por lo tanto igual a $\frac{a}{2}$, en este caso las deformaciones angulares según la segunda armónica se igualan a 0.

Para el valor de la deformación según la tercera armónica ($m \geqslant 0.60$) (fig. 42) obtendremos:

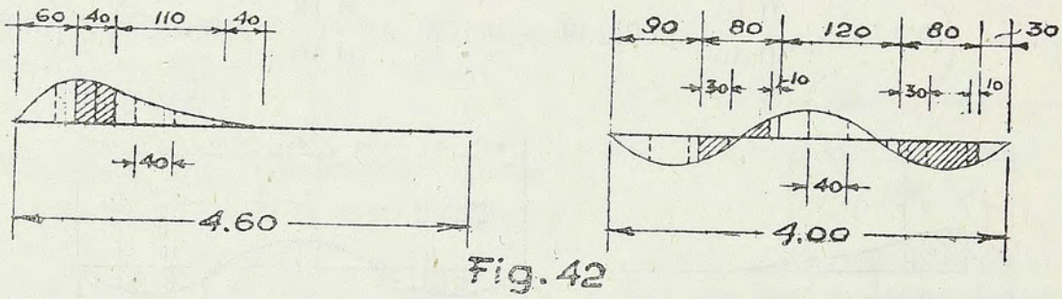


Fig. 42

$$\frac{2k\pi}{a}\,\varphi^{o}_{III} = \left(0.239 \times \frac{0.20}{0.40} + 0.158 \times \frac{0.20}{0.40} + 0.0120 \times \frac{0.30}{0.40}\right) \times$$

$$\times \left(-0.6812 \times \frac{0.30}{0.40} + 0.1507 + 0.8584 \times \frac{0.10}{0.40} - 0.6812 \times\right.$$

$$\left.\times \frac{0.30}{0.40} - 0.9515 - 0.4374 \times \frac{0.10}{0.40}\right) \times 10^{-3}\ qa^2 =$$

$$= -\ 0.356 \times 10^{-3}\ qa^2$$

y en definitiva:

Lado de 4.0 m. de largo $a = 4.0$ m.

En el centro $\frac{2k\pi}{a}\,\varphi^{o}_{centro} = (11.48 - 0.356) \times 10^{-3}\ qa^2 = 11.124 \times 10^{-3}\ qa^2$

En los tercios

$$\frac{2k\pi}{a}\,\varphi_1^{o} = \frac{2k\pi}{a}\,\varphi_2^{o} = 0.866 \times 11.48 \times 10^{-3}\ qa^2 = 9.941 \times 10^{-3}\ qa^2$$

Lado de 4.60 m. de largo $a = 4.60$ m.

En el centro $\frac{2k\pi}{a}\,\varphi^{o}_{centro} = (8.40 - 0.304) \times 10^{-3} qa^2 = 8.096 \times 10^{-3}\ qa^2$

En los tercios

$$\frac{2k\pi}{a}\,\varphi_1^{o} = \frac{2k\pi}{a}\,\varphi_2^{o} = 0.866 \times 8.40 \times 10^{-3}\ qa^2 = 7.274 \times 10^{-3}\ qa^2$$

Cálculo de los grados de empotramiento

Los espesores de todas las losas son iguales, lo que nos permite tomar $\frac{EI}{a} = 1$

Primero vamos a tratar el caso de la carga sobre la losa II suponiendo que las losas IV y VI no existen.

$$«S_{4I} = S_{5III}» \qquad m = \frac{4.60}{4.0} = 1.15 \qquad f_b = f_c = f_d = 0$$

según las tablas $S_{4\,I} = S_{5III} = 6.34$

para la losa II $S_{4\,II\,min} = 6.34$

y $f_{4\,II} = f_{5\,II} = 6.34 : (6.34 + 6.34) = 0.50$

$$« S_{2\,V} » \qquad m = \frac{4.0}{4.6} = 0.87 \qquad f_b = f_c = f_d = 0$$

según las tablas $S_{2V} = 6.54$

para la losa II $S_{min2\,II} = 6.54$ y $f_{2\,II} = 0.50$

Estos valores de los grados de empotramiento se podrían escribir sin ningún cálculo previo, ya que en el caso de ser todas las losas iguales, la suposición indicada anteriormente nos lleva a que todos los grados de empotramiento de los lados continuos son iguales a 0.50.

Si consideramos la influencia de las losas IV y VI, con suficiente exactitud se puede considerar para el cálculo de «$f_{4\,II}$» que $f_{1\,I} = 0.50$ luego $S_{4\,I} = 6.73$

y $f_{4\,II} = f_{5\,II} = 6.73 : (6.73 + 6.34) = 0.515 = f_{6\,V} = f_{7\,V}$

$$« S_{2\,V} » \qquad m = 0.87 \qquad f_b = 0 \quad f_c = f_d = 0.515$$

según las tablas $S_{2\,V} = 7.32$

y $f_{2\,II} = 7.32 : (7.32 + 6.54) = 0.528 = f_{2\,V}$

$$« S_{4\,II} » \qquad m = 1.15 \qquad f_b = 0.515 \qquad f_c = 0 \qquad f_d = 0.528 \qquad S_{4\,II} = 6.82$$

y $f_{4\,I} = 6.82 : (6.82 + 6.34) = 0.518 = f_{5III} = f_{6\,IV} = f_{7\,VI}$

$$« S_{1\,I} » \qquad m = 0.87 \qquad f_b = f_c = 0 \qquad f_d = 0.518 \qquad S_{1\,I} = 6.92$$

y $f_{1\,IV} = 6.92 : (6.92 + 6.54) = 0.514 = f_{1\,I} = f_{3\,III} = f_{3\,VI}$

Los grados de empotramiento calculados exactamente acusan muy poca diferencia con los obtenidos a base de la suposición aproximada, justificándose así su aplicación.

Momentos de empotramiento elástico debidos a la carga

a) Suposición de que las losas IV y VI no existen.

Para este caso hay que analizar solamente el estado de carga sobre la losa II.

$$m = 0.87 \qquad f_b = 0 \qquad f_c = f_d = 0.50 \qquad f_a = 0.50$$

$$\frac{2k\pi}{a}\,\varphi_1{}^{o} = \frac{2k\pi}{a}\,\varphi_2{}^{o} = 7.274 \times 4.60^2 \times 10^{-3} q = 0.1538\,q$$

$$\frac{2k\pi}{b}\varphi_5^{\circ} = \frac{2k\pi}{b}\varphi_6^{\circ} = \frac{2k\pi}{b}\varphi_7^{\circ} = \frac{2k\pi}{b}\varphi_8^{\circ} = 9.941 \times 4.0^2 \times 10^{-3} q = 0.159\ q$$

usando las tablas de momentos y la fórmula (79), e interpolando entre m = 0.80 y m = 0.90 se tendrá

$$M'_2 = \frac{-2.129 \times 0.1538 + (0.126 + 0.409) \times 0.159}{1.771 - 0.183 \times 0.50} \times 0.5\ q = -0.0722\ q$$

según Fischer el momento $M'_2 = -0.0728\ q$ (la diferencia es de 0.8%)

para: $m = 1.15$ $f_b = f_c = 0.50$ $f_d = 0$ $f_a = 0.50$ se tendrá:

a)

$$\frac{2k\pi}{a}\varphi_1^{\circ} = \frac{2k\pi}{b}\varphi_2^{\circ} = \frac{2k\pi}{a}\varphi_3^{\circ} = \frac{2k\pi}{a}\varphi_4^{\circ} = -0.159\ q$$

$$\frac{2k\pi}{b}\varphi_5^{\circ} = \frac{2k\pi}{b}\varphi_6^{\circ} = 0.1538\ q$$

$$M_4' = M_5' = \frac{-(1.972-0.110)\times 0.159 + (0.030+0.293)\times 0.1538}{+\ 1.690-0.109\times 0.50} \times 0.5\ q =$$

$$= -0.0754\ q$$

según Fischer el momento $M_4' = M_5' = -0.0738\ q$ (la diferencia es de 2.2%)

b) Tomando los grados de empotramiento efectivos, sin las limitaciones anteriores, se tendrá:

Carga sobre la losa I:

$m = 0.87$ $f_b = f_c = 0$ $f_d = 0.518$ $f_a = 0.514$

Los ángulos « φ° » son iguales al caso «a», luego de las tablas se obtendrá:

$$M_1' = \frac{-1.989\times 0.1538 + (0.064+0.196)\times 0.159}{1.655-0.088\times 0.514} \times 0.514\ q = -0.0846\ q$$

$m = 1.15$ $f_b = f_d = 0$ $f_c = 0.514$ $f_a = 0.518$

$$M_4' = \frac{-2.030\times 0.159 + (0.047+0.305)\times 0.1538}{1.739-0.100\times 0.518} \times 0.518\ q = -0.0825\ q$$

Carga sobre la losa II:

$m = 0.87$ $f_b = 0$ $f_c = f_d = 0.515$ $f_a = 0.528$

Los valores de « φ° » no se alteran.

$$M_2' = \frac{-2.138 \times 0.1538 + (0.130 + 0.422) \times 0.159}{1.779 - 0.188 \times 0.528} \times 0.528\ q = -0.0758\ q$$

$m = 1.15$ $f_b = 0.515$ $f_c = 0.528$ $f_d = 0$ $f_a = 0.515$

$$M_4' = M_5' = \frac{-(1.983-0.109)\times 0.159 + (0.031+0.310)\times 0.1538}{1.699 - 0.112 \times 0.515} \times 0.515\ q =$$

$$= -0.0771\ q$$

Los momentos «M_4''» y «M_5''» aparecen sólo como consecuencia de $f_{2\,II} \neq 0$,

entonces para obtener el valor de ellos bastará transportar el momento « M_2' » hacia los lados «4» y «5», para $m = 0.87$ $f_b = 0$ $f_c = f_d = 0.515$ se obtendrá de las tablas el coeficiente de transporte C. O. ($M_c'' = M_d''$) igual a -0.087 y en consecuencia $M_4'' = M_5'' = -0.087 \times (-0.0758\ q) = +0.0066\ q$

La segunda armónica tiene en este caso un valor que sólo representa un 8.6% del valor de la primera.

Para obtener los valores de la segunda armónica en los bordes «1» y «4» de la losa I se pueden aplicar las mismas consideraciones que mencionamos en el caso anterior:

Si el lado de la losa I, opuesto al borde «4», tuviera un grado de empotramiento igual a $f = 0.515$, todos los momentos de la losa I deberían ser iguales a los de la losa II.

Entonces para obtener el valor de «M_1''» se aplican a lo largo del borde de la losa I opuesto al lado «4», momentos iguales a los «M_4» de la losa II, pero con signo contrario.

Si transportamos estos momentos hacia el lado «1» podremos obtener el valor del momento que nos interesa.

De los momentos considerados sólo merece ser transportado «M'» luego:

$$M_1'' = -0.087 \times (+0.0771\ q) = -0.0067\ q$$

Vemos que el valor de la segunda armónica es sólo un 7.9% de la primera.

Ahora calcularemos aproximadamente los valores de los «M'''» para formarnos una idea del orden de ellos.

Conociendo los valores de «M'» y «M''» y aprovechando las ecuaciones de la losa elásticamente empotrada se puede escribir para el borde «2» de la losa II lo siguiente:

$m = 0.87$ punto «a», (interpolación entre $m = 0.8$ y 0.9)

$$M_2''' = \frac{0.528}{0.333}\left(+\frac{0.960}{0.528} \times 0.0758 + 0.238 \times 2 \times 0.0771 - 0.043 \times 2 \times \right.$$
$$\left. \times\ 0.0066 - 0.008096 \times 4.60^2\right)\ q = +0.0041\ q \quad (5.4\%\ \text{de}\ M_2')$$

y para el borde «4» (ó «5»)

$m = 0.87$ punto «c» (ó «d»)

$$M_4''' = M_5''' = \frac{0.515}{0.290}\left(+\frac{0.861}{0.515} \times 0.0771 + 0.123 \times 0.0771 + 0.286 \times 0.0758 - \right.$$
$$\left. -\ 0.011124 \times 4.0^2 . \times \frac{4.0}{4.6}\right)\ q = +0.0092\ q\ (11.9\%\ \text{de}\ M_4')$$

Los momentos «M_2'''», «M_4'''» y «M_5'''» actúan en los centros de las losas en el sentido opuesto a los «M'''» correspondientes, disminuyendo así los momentos máximos totales.

Los momentos «M'''» en la losa I son del mismo orden que los de la losa II.

Basándonos en las consideraciones expresadas antes en los Capítulos IX y X nos limitaremos a considerar solamente las influencias de la primera armónica.

Los «C. O.» correspondientes a la acción del momento «M'» tomados de las tablas serán:

Losa I $C.O_{14} = -0.185$ $C.O_{41} = -0.141$

Losa II $C.O_{45} = C.O_{54} = -0.056$ $C.O_{42} = C.O_{52} = -0.136$ $C.O_{24} = C.O_{25} = -0.171$

Para las losas III a VI, por simetría, los valores de los «C. O.» son iguales y del mismo signo que para las losas I y II.

En la figura 43 hemos indicado el conjunto de losas por calcular con sus respectivos «f» y «C. O.».

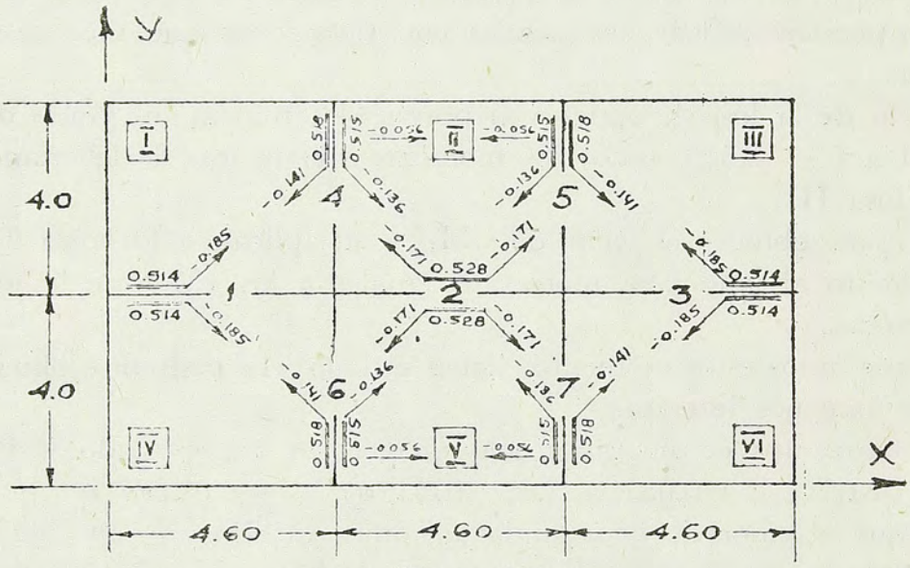


Fig. 43

Para obtener todas las combinaciones posibles de carga de las losas bastaría, por simetría, analizar los estados de carga sobre las losas I y II y sus influencias sobre los momentos de apoyo de las losas restantes.

La tabla siguiente calculada a base de los momentos de empotramiento elástico y los «C. O.» según la figura 43, resume las influencias de las cargas sobre las losas I y II para todos los momentos de apoyo del conjunto. La repartición de los momentos de las losas cargadas hacia las losas descargadas está limitada a sólo dos reparticiones consecutivas.

Carga en losa	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	Multiplicador
I	—846	—21	—	—	—	+157	—9	10^{-4} q
	—	+112	—6	—825	+46	—19	—19	
II	+109	—	—	—771	—	—20	—	10^{-4} q
	—	—	+109	—	—771	—	—20	
	—18	—758	—18	—	—	+130	+130	

usando la tabla anterior para la determinación del momento máximo del tramo en la losa II (cargadas son las losas II, IV y VI) se tendrá:

$$M_4 = M_5 = \Big[-771 + (157 - 19) + (-9 - 19)\Big] \times 10^{-4}q = -\underline{0.0661q}$$

$$M_2 = \Big[-758 + (112 - 21) \times 2\Big] \times 10^{-4}q = -\underline{0.0576\ q}$$

Como podemos ver las cargas sobre las losas IV y VI disminuyen el valor de los momentos «$M_4 = M_5$» en un 14% y el valor de «M_2» en un 24% con respecto a los momentos obtenidos cuando la carga sólo actúa sobre la losa II, aumentándose así el momento del tramo.

En forma parecida la tabla permite obtener los valores máximos y mínimos de cualquier momento de apoyo del conjunto que pueda interesarnos.

Para obtener los momentos máximos del tramo en la losa II, vamos a usar los valores de los momentos del tramo en una losa simplemente apoyada calculados por Fischer. Según él, el máximo momento del tramo está en un punto ubicado a una distancia de $0.65 \times 4.0 = 2.60$ m. del borde 2 y $0.50 \times 4.60 = 2.30$ m. de los bordes «4» y «5». Luego para este punto el valor del momento en una losa simplemente apoyada (para $\mu = 0$) será en los sentidos «x» e «y»:

$$M_{x\ tr} = 0.0766\ q$$

$$M_{y\ tr} = 0.0992\ q$$

Las influencias de los momentos de borde se calculan según las tablas 4 y 5 obteniéndose:

$$M_{max\ x\ tr} = 0.0766\ q - 0.0576\ q \times 0.105 - 0.0661\ q \times 0.0235 \times \times 0.891 \times 2 = \underline{0.0678\ q}$$

$$M_{max\ y\ tr} = 0.0992\ q - 0.0576\ q \times 0.040 - 0.0661\ q \times 0.1365 \times \times 0.891 \times 2 = \underline{0.0808\ q}$$

el número 0.891 corresponde a Sen 63°, que aparece porque el punto considerado no está en el centro de la losa.

Si calculamos los momentos de apoyo sin considerar la influencia de las cargas en las losas IV y VI, obtendremos para los momentos del tramo los valores:

$$M_{max\ x\ tr} = 0.0654\ q \qquad (96.5\%)$$

$$M_{max\ y\ tr} = 0.0774\ q \qquad (95.7\%)$$

Las diferencias con el cálculo más exacto son solamente un 3.5% y un 4.3%, lo que demuestra una vez más la poca influencia de los errores cometidos en el cálculo de los momentos de apoyo sobre la exactitud de los valores de los momentos del tramo.

Ejemplo 5

En la figura 44 vemos las plantas y cortes de la parte superior de un estanque elevado para agua, de concreto armado.

Calcularemos para este estanque los momentos flectores en todas las losas:

Cargas:	Techo:	Peso propio	$0.11 \times 2\,400 =$	264 Kg/m².
		Sobrecarga		200 "
				464 Kg/m².
	Fondo:	Peso propio	$0.20 \times 2\,400 =$	480 Kg/m².
		Peso del agua		3 850 "
				4 330 Kg/m².

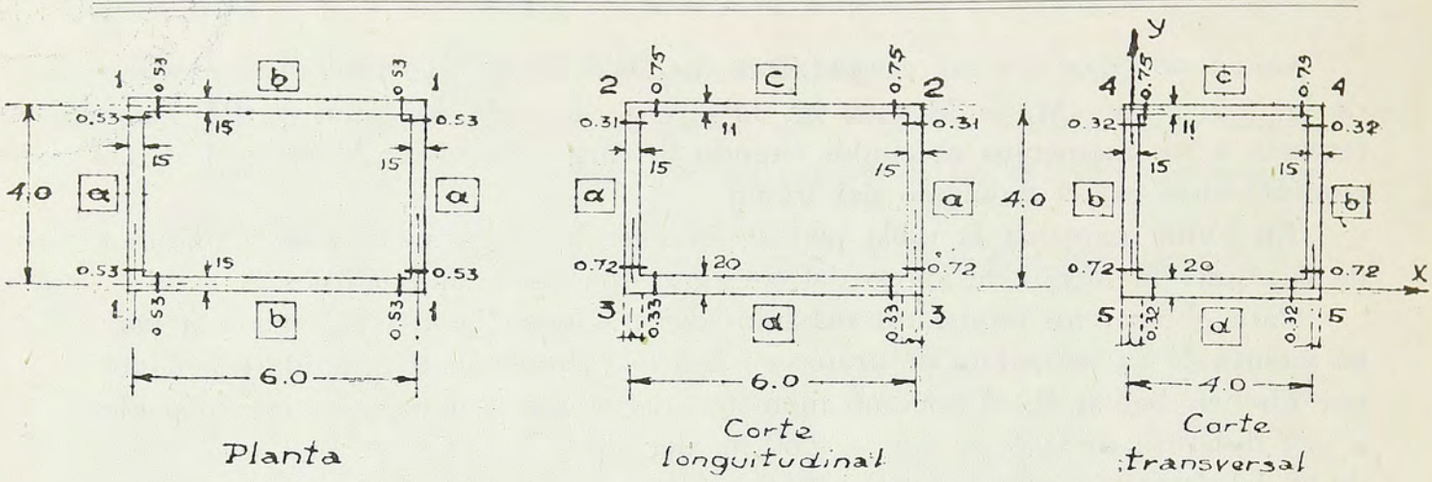


Fig. 44

Muros: Carga hidrostática con
presión de agua, variable de cero a 3.850 Kg/m².

a) Cálculo de los momentos de inercia relativos.

Techo: $h^3 = 1.10^3 = 1.33$ Muros: $h^3 = 1.50^3 = 3.38$

Fondo: $h^3 = 2.0^3 = 8.00$

b) Rigideces relativas y grados de empotramiento.

«f_{3d}» Losa «a». «S_{3a}». m = 1.0 Aproximado $f_{2a} = 0.20$ $f_{1a} = 0.50$
$S_{3a} = 7.22 \times 3.38 = 24.40$
Losa «d». $m = \frac{6.0}{4.0} = 1.50$ $S_{d\ min} = 6.32 \times 8 = 50.60$
$f_{3d} = 24.40 : (24.40 + 50.60) = 0.326 \approx 0.33$

«f_{3a}» Losa «d». «S_{3d}» m = 1.50 $f_{3d} \approx 0.30$ Aproximado $f_{5d} = 0.35$
$S_{3d} = 6.89 \times 8.0 = 55.10$
Losa «a». m = 1.0 $S_{a\ min} = 6.41 \times 3.38 = 21.70$
$f_{3a} = 55.10 : (55.10 + 21.70) = 0.718 \approx 0.72$

«f_{2c}» Losa «a». «S_{2a}» m = 1.0 $f_{3a} = 0.70$ Aproximado $f_{1a} = 0.50$
$S_{2a} = 7.28 \times 3.38 = 24.60$
Losa «c». m = 1·50 $S_{c\ min} = 6.32 \times 1.33 = 8.40$
$f_{2c} = 24.60 : (24.60 + 8.40) = 0.746 \approx 0.75$

«f_{2a}» Losa «c». «S_{2c}» m = 1.50 $f_{2c} = 0.75$ Aproximado $f_{4c} = 0.70$
$S_{2c} = 7.44 \times 1.33 = 9.90$ $S_{a\ min} = 21.70$
$f_{2a} = 9.90 . (9.90 + 21.70) = 0.313 \approx 0.31$

«f_{5d}» Losa «b». «S_{5b}» m = 0.67 Aproximado $f_{4b} = 0.30$ $f_{1b} = 0.50$
$S_{5b} = 7.77 \times 3.38 = 26.30$
Losa «d». m = 0.67 $S_{d\ min} = 7.0 \times 8.0 = 56.0$
$f_{5d} = 26.30 : (26.30 + 56.0) = 0.319 \approx 0.32$

«f_{5b}» Losa «d». «S_{5d}». m = 0.67 $f_{5d} \approx 0.30$ $f_{3d} \approx 0.35$
$S_{5d} = 7.6» \times 8 = 60.80$
Losa «b». m = 0.67 $S_{b\ min} = 7.0 \times 3.38 = 23.70$
$f_{5b} = 60.80 : (60.80 + 23.70) = 0.72$

«f_{4c}» Losa «b». «S_{4b}» m = 0.67 $f_{5b} \approx 0.70$ Aproximado $f_{1b} = 0.50$
$S_{4b} = 8.01 \times 3.38 = 27.10$
Losa «c». m = 0.67 $S_{c\ min} = 7.0 \times 1.33 = 9.30$
$f_{4c} = 27.10 : (27.10 + 9.30) = 0.746 \approx 0.75$

UNIVERSIDAD DE C ESCUELA DE INGENIE Biblioteca Central

«f_{4b}» Losa «c». «S_{4c}». m = 0.67 f_{4c} = 0.75 f_{2c} = 0.75
S_{4c} = 8.30×1.33 = 11.10 $S_{b\ min}$ = 23.70
f_{4b} = 11.10 : (11.10×+23.70) = 0.319≈0.32

«f_{1a}» Losa «b». «S_{1b}» m = 1.50 f_{4b}≈0.30 f_{5b}≈0.70 Aproximaúo f_{1b}=0.50
S_{1b} = 7.13×3.38 = 24.10 $S_{a\ min}$ =21.70
f_{1a} = 24.10 : (24.10+21.70) = 0.526≈0.53

«f_{1b}» Losa »a». «S_{1a}» m=1.0 f_{1a}≈0.50 f_{2a}≈0.30 f_{3a}≈0.70
S_{1a} = 7.26×3.38 = 24.50
Losa «b». m = 1.50 $S_{b\ min}$ = 6.32×3.38 = 21.40
f_{1b} = 24.50 : (24.50+21.40) = 0.534≈0.53

Durante el desarrollo del cálculo para obtener las rigideces, hemos debido apreciar en forma aproximada los valores de los grados de empotramiento desconocidos.

Comparando, por ejemplo, el valor de « f_{2a} » adoptado en el cálculo de « S_{3a}» con el obtenido en definitiva, vemos que la diferencia es bastante grande (0.31 en vez de 0.20).

Para el coeficiente de transporte del momento esto significa un error en su avalúo de 50%, pero no afecta prácticamente los valores de « S_{3a} » y « t_{3d} ».

c) Momentos de empotramiento perfecto debidos a la carga en las losas aisladas.

Se adoptó la convención de designar como positivos todos aquellos momentos que generan tracciones en las caras exteriores del estanque.

Losa "c". $f_{2c} = f_{4c} = 1$ q = 464 kg/m²
según la fig. 29 (Caso 6).

m = 1.50 $M_{2c}' = +\ 0.052 \times 464 \times 4.0^2 = +\ 386$ kg. m.
m = 0.67 $M_{4c}' = +\ 0.033 \times 464 \times 6.0^2 = +\ 552$ kg. m.

Losa "d". $f_{3d} = f_{5d} = 1$ q = 4330 kg./m²
según la fig. 29 (Caso 6).

m = 1.50 $M_{3d}' = -\ 0.052 \times 4330 \times 4.0^2 = -\ 3600$ kg. m.
m = 0.67 $M_{5d}' = -\ 0.033 \times 4330 \times 6.0^2 = -\ 5150$ kg. m.

Losas "a".

La carga triangular q = 3850 kg/m². se reemplaza por dos cargas: uniformemente repartida de $\frac{3850}{2}$ = 1925 kg/m².
y triangular antimétrica ± 1925 kg/m².

Con el uso de las tablas para $f_{1a} = f_{2a} = f_{3a} = 1$

$$m = 1.0 \quad M_{2a}' = \frac{-\ 69.6 + 22.4}{1.836 - 0.376} \times 10^{-3} \times 1925 \times 4.0^2 = -\ 998 \text{ kg. m.}$$

$$M_{3a}' = \frac{-\ 69.6 - 22.4}{1.46} \times 10^{-3} \times 1925 \times 4.0^2 = -\ 1940 \text{ kg. m.}$$

$$M_{1a}' = \frac{-\ 69.60}{1.46} \times 10^{-3}\ 1925 \times 4.0^2 = -\ 1467 \text{ kg. m.}$$

$$M_{1a}'' = \frac{-2.25}{0.239 - 0.016} \times 10^{-3} \times 1925 \times 4.0^2 = -311 \text{ kg. m.}$$

Losas "b":

Las cargas son como para las losas "a".

Con el uso de las tablas para $f_{1b} = f_{4b} = f_{5b} = 1$

$$m = 1.50 \quad M_{1b}' = \frac{-99.80}{2.326 - 0.411} \times 10^{-3} \times 1925 \times 4.0^2 = -1607 \text{ kg. m.}$$

$$M_{1b}'' = \frac{-2.25}{0.239 - 0.016} \times 10^{-3} \times 1925 \times 4.0^2 = -311 \text{ kg. m.}$$

$$m. = 0.67 \quad M_{4b}' = \frac{-21.2 + 4.94}{0.631} \times 10^{-3} \times 1925 \times 6.0^2 = -1786 \text{ kg. m.}$$

$$M_{5b}' = \frac{-21.20 - 4.94}{0.785 - 0.154} \times 10^{-3} \times 1925 \times 6.0^2 = -2870 \text{ kg. m.}$$

Con referencia a los valores de los momentos distribuídos según la tercera armónica (M'''), podemos afirmar que en el caso de la acción de una carga triangular, la relación entre los valores «M'''» y «M'» queda casi igual al caso en que actúa una carga uniformemente repartida (ver Capítulo XI), hecho que nos permite omitir el cálculo de ellos.

En general se puede observar que en el presente caso, en que los valores de «f» de los lados adyacentes son iguales entre sí, las tablas para el cálculo de los valores de «M'» y «M''» dan errores muy pequeños (ver observaciones del Capítulo X) que pearmiten, si se desea, calcular los valores de «M'''» introduciendo los valores de «M'» y «M''» en las ecuaciones de los puntos «a», «b» y «c» de la losa elásticamente empotrada.

d) Repartición de los momentos.

Los momentos desequilibrados en cada nudo se reparten primeramente entre las losas que forman el nudo.

La repartición se hace en función de las rigideces correspondientes, que están anotadas junto con los coeficientes de repartición en la tabla siguiente:

APOYOS														
1			2			3			4			5		
S		K	S		K	S		K	S		K	S		K
1 a	24.5	0.504	2 a	24.6	0.713	3 a	24.4	0.307	4 c	11.1	0.290	5 b	26.3	0.302
1 b	24.1	0.496	2 c	9.9	0.287	3 d	55.1	0.693	4 b	27.1	0.710	5 d	60.8	0.698

La repartición de los momentos «M'» hacia los otros apoyos se hace según los

coeficientes de repartición «C.O.» tomados de las tablas correspondientes y anotados en la figura 45 (considerando la simetría se anotó solamente una parte de los coeficientes).

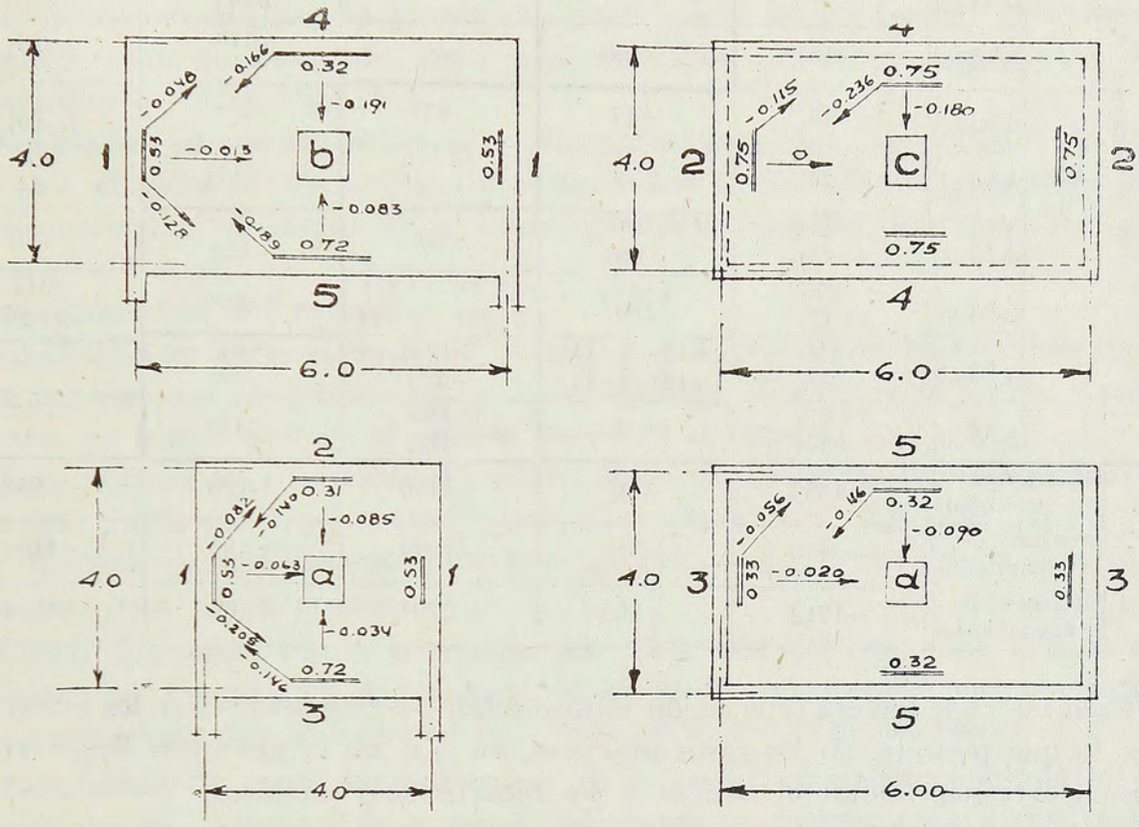


Fig. 45

La repartición de momentos «M'» se hizo directamente en la forma indicada en la tabla siguiente. Los valores de la tercera repartición se han anotado entre paréntesis.

Número de momento	M_1		M_2		M_3		M_4		M_5	
Carga sobre las losas aisladas	a	— 1467	a	— 998	a	— 1940	c	+ 552	b	— 2870
	b	— 1607	c	+ 386	d	— 3600	b	— 1786	d	— 5150
Momento desequilibrado ΔM	— 140		—1384		— 1660		— 2338		— 2280	
Primera repartición en el nudo	a	— 70	a	+ 988	a	— 510	c	— 678	b	— 688
	b	+ 70	c	— 396	d	+ 1150	b	+ 1660	d	+ 1592

Repartición de los momentos «ΔM»	ΔM_{1a}	−70	+6 +6	+14 +14	—	—
	ΔM_{1b}	+70	—	—	−3 −3	−9 −9
	ΔM_{2a}	−138	+988	−84	(+7) (+7)	(+18) (+18)
	ΔM_{2c}	(−15)	−396	—	+46 +46	(−17)
	ΔM_{3a}	+74	+17	−510	—	(−10) (−10)
	ΔM_{3d}	(+24)	—	+1150 −23	(+11)	−64 −64
	ΔM_{4c}	(−20) (−45)	+160 +160	−27	−678 +122	(−23)
	ΔM_{4b}	−275 (+17)	(+23) (+23)	(+56) (+37) (+56) (+37)	+1660	−317 (+29)
	ΔM_{5b}	+130 (−8)	(−13) (−11) (−13) (−11)	(−27) (−27)	+57 (−10)	−688
	ΔM_{5d}	(+27) (+54)	(+13)	−185 −185	(+12)	+1592 −143
Valores de momentos definitivos	Después de 1ª repartición	−1537	−10	−2450	−126	−3558
	Después de 2ª repartición	−1746	+339	−2899	+139	−4164
	Después de 3ª repartición	−1712	+350	−2794	+166	−4159

Como se ve la tercera repartición influye relativamente poco sobre los valores de «M′», lo que permite, en los casos prácticos, en que no es necesario llegar a una precisión excesiva, limitar el cálculo a dos reparticiones sucesivas.

En cuanto se refiere a los valores de la segunda armónica «M″» vemos que debido a la simetría de las cargas, los momentos asimétricos pueden existir solamente en los bordes «1».

Además del valor calculado anteriormente de $M_{1a}'' = M_{1b}'' = -311$ kg. m., tendremos el valor de los momentos «M″» que aparecen como consecuencia de la acción de los momentos desequilibrados obtenidos después de la primera repartición (ver tabla).

Ellos son: $\triangle M_{2a}' = +988$ kg. m. $\triangle M_{3a}' = -510$ kg. m.

$\triangle M_{4b}' = +1660$ kg. m. $\triangle M_{5b}' = -688$ kg. m.

Los coeficientes de transporte, para obtener los valores de «M″» en el borde «1», según las tablas son:

$C.O._{21}'' = +0.095$ $C.O._{31}'' = -0.102$

$C.O._{41}'' = +0.094$ $C.O._{51}'' = -0.086$

Entonces el momento «M_1''» debido a la acción de los momentos desequilibrados será:

$$M_1'' = +0.095 \times 988 + 0.102 \times 510 + 0.094 \times 1660 + 0.086 \times 688 = +361 \text{ kg. m}$$

Sumando el momento obtenido, con el momento correspondiente a las losas consideradas aisladamente tendremos:

$$M_1'' = -311 + 361 = +50 \text{ kg. m.}$$

Valor que es solamente un 3% del valor de «M_1'» y por lo tanto puede ser despreciado.

La eliminación del momento «M''» a lo largo de los bordes «1» se justifica comúnmente en los cálculos de estanques bajos cuyo techo es liviano (f sup es casi 0) y cuyo fondo está muy cargado, generándose así momentos definitivos en la parte inferior de los muros, cuyo valor es mayor que el que correspondería al empotramiento perfecto de ellos.

Solamente en los estanques altos, formados por losas con relación de luces $m > 1.0$, el valor del momento «M''» de la losa aislada puede ser considerablemente mayor que el efecto de descarga, producido por los momentos desequilibrados.

e) Momentos del tramo.

El cálculo de los momentos del tramo, en el techo y en el fondo del estanque, puede hacerse muy fácilmente una vez conocidos los momentos de apoyo, y puede realizarse en forma análoga al cálculo hecho en el ejemplo 3.

Para obtener los momentos del tramo en los muros se pueden aprovechar las tablas del profesor Timoshenko [11] que dan (para $\mu = 0.30$) los valores de los momentos en una losa simplemente apoyada, bajo la acción de una carga triangular, para varios puntos.

Como aplicación vamos a calcular los momentos del tramo de la losa «a». Las tablas de Timoshenko dan valores de los momentos, para el eje de simetría, en los puntos ubicados a distancias 0.25; 0.40; 0.50 y 0.75 h. del fondo.

Superponiendo sobre los momentos de la losa simplemente apoyada las influencias de los momentos de apoyo y calculando los valores para varios puntos, se llega a la conclusión de que los momentos máximos se producen en los puntos ubicados a la distancia de «0.40h» para «M_y» y de «0.50h» para «M_x» (eje «x» horizontal).

Luego siendo los momentos en la losa simplemente apoyada según Timoshenko

$$M_x = + 0.0184 \times 3850 \times 4.0^2 = + 1133 \text{ kg. m.} \qquad (\mu = 0)$$
$$M_y = + 0.0209 \times 3850 \times 4.0^2 = + 1287 \text{ kg. m.} \qquad (\mu = 0)$$

y las influencias de los momentos de apoyo (según las tablas 4 y 5)

$$M_1' = - 1712 \text{ kg. m.} \quad M_3' = - 2794 \text{ kg. m.} \quad M_2' = + 350 \text{ kg. m.}$$

se tendrá:

$$M_{x\,max} = + 1133 - 1712 \times 2 \times 0.056 - (2794 - 350) \times 0.144 = + \underline{589 \text{ kg. m.}}$$
$$M_{y\,max} = + 1287 - 1712 \times 2 \times 0.144 \times 0.95 - 2794 \times 0.113 + 350 \times 0.023 =$$
$$= + \underline{511 \text{ kg. m.}}$$

En forma análoga se pueden calcular los momentos maximos de la losa «b».

Es interesante comparar los valores de los momentos obtenidos en este ejemplo con los que resultan según un cálculo aproximado, más corriente, que consiste en repartir las cargas en dos sentidos, según la condición de igualidad de las flechas, calculando las franjas horizontales y verticales como marcos cerrados solicitados por estas cargas.

Comparando los valores definitivos de los momentos de apoyo en ambos casos se puede confirmar la buena coincidencia de los valores de los momentos en los bordes «4» y «5» (corte transversal).

Esta coincidencia cambia fundamentalmente al comparar los valores de los momentos de apoyo en el corte longitudinal (bordes «2» y «3»), en este caso el cálculo aproximado da valores de momentos que alcanzan solamente a un 50% de los valores correctos.

La existencia de esta diferencia tiene su origen en el método de repartición de las cargas sobre el cual ya llamamos la atención en el ejemplo 3.

En la literatura relacionada con el cálculo de estanques, a nuestra disposición, hay relativamente pocos ejemplos de cálculos exactos de estanques completos.

La mayor parte de los trabajos exactos se dedica a analizar solamente las tensiones en losas aisladas con diversas condiciones de apoyo.

Uno de los trabajos que tratan más a fondo el cálculo de estanques rectangulares es el del doctor ingeniero H. Fritz [15].

En el libro mencionado el autor resuelve el problema de cálculo de losas solicitadas por una carga hidrostática aplicando dobles series de Navier.

Comparando los valores de los momentos en los estanques calculados por el doctor Fritz, con los valores obtenidos par los mismos estanques calculados con el método propuesto (con tres momentos M′, M″ y M‴) se puede ver que las diferencias son del orden de un 1 a 2%.

Los tipos de estanques calculados por el doctor Fritz (de una sección, formados por las losas simplemente apoyadas arriba y empotradas abajo) formados por losas de igual espesor que tienen continuidad solamente en la arista vertical, pueden calcularse en forma excepcionalmente fácil aplicando para los bordes continuos la regla citada antes, que los momentos de apoyo del conjunto serán iguales a la mitad de la suma de los momentos de las losas aisladas, perfectamente empotradas en el borde considerado.

Ejemplo 6.

Hagamos un pequeño ejemplo de cálculo de un muro de contención colocado entre dos muros transversales.

En la fig. 46 vemos el muro de un subterráneo en que debería determinarse el momento de empotramiento elástico del muro en la lína «a» de unión con la zapata.

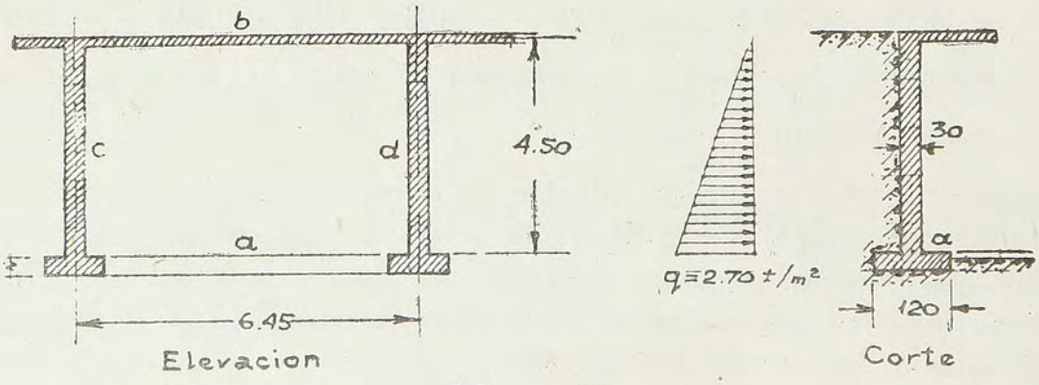


Fig. 46

El muro es de 30 cms. de espesor de concreto armado.

La zapata se supone infinitamente rígida con relación al terreno.

El coeficiente de elasticidad del terreno (suponiendo la proporción directa entre la carga y asentamiento) es de $c = 10$ kg/cm³. ó 10000 t/m³.

Los lados «c» y «d» los supondremos como perfectamente empotrados y el lado «b» como simplemente apoyado.

La carga máxima es de 2.70 t/m².

Se busca el momento de empotramiento «M_a'».

a) Rigidez de la fundación.

La rigidez de la fundación es el valor máximo del momento distribuído según la armónica fundamental, que produce en el centro del lado «a» un giro de la zapata igual a uno.

Vamos a cargar la zapata con un cierto momento «M'».

Entonces la fatiga máxima del terreno al borde de la zapata estará dada por:

$$\sigma_{terr} = \frac{M'}{W_{fund}} = \frac{6\,M'}{h^2} \qquad (\text{si } b = 1)$$

y la expresión para el giro de la zapata tendrá el valor:

$$\varphi = \frac{2\sigma_{terr}}{h\,c} = \frac{2 \times 6M'}{h\,c\,h^2} = \frac{12\,M'}{h^3\,c} = \frac{M'}{c\,I_{fund}}$$

Para obtener el valor de la rigidez pondremos $\varphi = 1$, entonces $M' = S$ y

$$\underline{S_{fund} = c\,I_{fund}}$$

En nuestro caso

$$I_{fund} = \frac{1.20^3}{12} = 0.144 \text{ m}^4 \qquad c = 10000 \text{ t/m}^3.$$

$$\text{y } S_{fund} = 10000 \times 0.144 = 1440 \text{ t. m.}$$

b) Rigidez del muro.

En este caso hay que conocer el valor absoluto de la rigidez del muro

$$I_{muro} = \frac{1.0 \times 0.30^3}{12} = 0.00225 \text{ m}^4 \qquad E = 2100000 \text{ t/m}^2.$$

$$m = \frac{4.50}{6.45} = 0.70$$ Según las tablas de rigideces, la rigidez mínima del muro será:

$$S_{min} = 6.87 \times \frac{EI}{a} = 6.87 \times \frac{2.10 \times 10^6 \times 2250 \times 10^{-6}}{6.45} = 5030 \text{ t. m.}$$

c) Grado de empotramiento del borde «a».

Según la fórmula (76) el grado de empotramiento buscado será

$$f_a = 1440 : (1440 + 5030) = 0.223$$

d) El momento de empotramiento elástico.

Según las tablas para: $m = 0.70$, $f_b = 0$ $\quad {}_c = f_d = 1.0$
$f_a = 0.223$ y $q_{max} = 2.70$ t/m². será

$$M_a' = \frac{-37.50 - 5.90}{1.063 - 0.173 \times 0.223} \times 0.223 \times 10^{-3} \times \frac{2700}{2} \times 6.45^2 = -530 \text{ kg. m.}$$

El valor del momento obtenido debe considerarse como aproximado ya que el coeficiente de elasticidad del terreno «c» es un valor cuya definición es muy compleja y en realidad no corresponde a una característica tan precisa como lo es en el coeficiente de elasticidad de un material homogéneo.

Ejemplo 7.

Calcularemos los momentos de empotramiento elástico de una losa aislada cuadrada, cuyos lados se apoyan sobre las vigas (ver fig. 47). El espesor de la losa es de 10 cms.

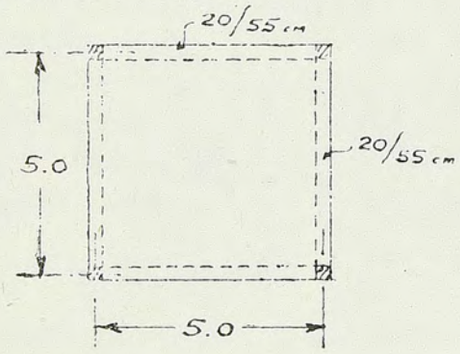


Fig. 47

La sección de las vigas del contorno es de b/h = 20/55 cms.

La carga repartida sobre la losa es de 250 kg/m².

La carga total será:

peso propio	240 kg/m².
sobrecarga	250 kg/m².
	490 kg/m².

El cálculo lo haremos tomando en cuenta la resistencia de las vigas a torsión y en lo que se refiere a la acción de los pilares soportantes, supondremos que ellos son demasiado débiles como para considerarlos como elementos resistentes a la flexión.

a) Rigidez de las vigas.

Para obtener la rigidez que nos interesa, primeramente vamos a cargar una de las vigas con un momento unitario $M' = 1$ (ver fig. 48).

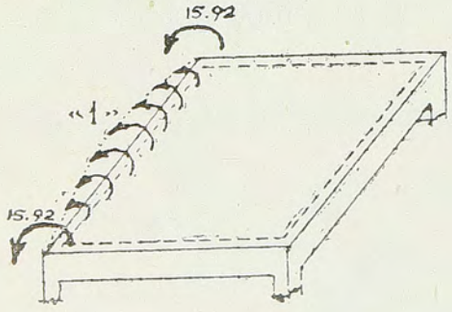


Fig. 48

La deformación máxima transversal « φ_1 » en el centro de la viga, bajo la suposición de inmovilidad de los apoyos, según la fig. 24 será:

$$\frac{b}{a} = \frac{55 - 5}{500} = 0.10$$

$$S = 1.92 \frac{EI_1}{a}$$

$$I_1 = \frac{1 \times 2^3}{12} = 0.67 \text{ dm}^4 \qquad a = 50 \text{ dm.}$$

$$\frac{S}{E} = 1.92 \frac{0.67}{50} = 0.0257 \qquad \varphi_1 = \frac{1}{S}$$

y entonces $E\varphi_1 = \dfrac{1}{0.0257} = 38.90$

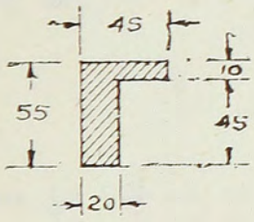
El momento de torsión aplicado produce, como reacción en los extremos de la viga, sendos momentos flectores que actúan sobre las vigas normales y cuyo valor en el apoyo es:

$$M = \frac{1 \times a}{\pi} = \frac{50}{3.14} = 15.92$$

Suponiendo que el apoyo, opuesto al lado donde está aplicado el momento, es un apoyo simple, el giro de apoyo « φ_2 » considerado será:

$$E\varphi_2 = \frac{M \times a}{3\ I_2} = \frac{15.92 \times 50}{3\ I_2} = \frac{265.5}{I_2}$$

valor en que « I_2 » es el momento de inercia de la viga



Para $\dfrac{b^o}{b} = 0.445$ y $\dfrac{d^o}{d} = 0.182$

$$I_2 = 0.63 \times \frac{4.5 \times 5.5^3}{12} = 41.6 \text{ dm}^4$$

$$\text{Luego } E\varphi_2 = \frac{265.5}{41.6} = 6.38$$

Calculando ambos efectos

$$E\varphi = E\varphi_1 + E\varphi_2 = 38.90 + 6.38 = 45.28$$

La rigidez será $S = \dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{E}{45.28} = 0.0221\ E$

b) Rigidez de la losa

$$I = \frac{1 \times 1^3}{12} = 0.0833 \text{ dm}^4. \text{ Según las tablas } S_{min} = 6.41 \frac{EI}{a}$$

luego: $S_{min} = 6.41 \times \frac{E \times 0.0833}{50} = 0.0107\ E$

c) Grados de empotramiento

Tomando en consideración los factores «φ_1» y «φ_2» el grado de empotramiento será:

$$f = 221 : (221 + 107) = 0.674$$

Si suponemos que los apoyos de la viga son rígidas a la torsión

$$S = \frac{E}{38.90} = 0.0257\ E$$

$$y \quad f = 257 : (257 + 107) = 0.704$$

como podemos ver la diferencia es bastante pequeña.

d) Momentos de apoyo.

Según las tablas

$$\text{para} \quad m = 1.0 \quad y \quad f = 0.674$$

$$M_{ap}' = \frac{-92.60}{1.844 - 0.274 \times 0.674} \times 0.674 \times 10^{-3} \times 490 \times 5.0^2 = -461 \text{ kg. m.}$$

$$\text{para } m = 1.0 \quad y \quad f = 0.704$$

$$M_{ap}' = \frac{-90.90}{1.847 - 0.283 \times 0.704} \times 0.704 \times 10^{-3} \times 490 \times 5.0^2 = -477 \text{ kg. m.}$$

Una comparación de los valores obtenidos nos demuestra que para las vigas corrientes ($h/l \approx 0.10$) la influencia de los giros de apoyos es muy pequeña.

Además de las influencias indicadas anteriormente, la viga de borde sufre una deformación debida a la carga vertical.

Carga: Reacción de la losa (suponiéndola uniformemente repartida)

$$490 \times \frac{5.0 \times 5.0}{5.0 \times 4} = 612 \text{ kg/m.}$$

$$\text{peso propio de la viga} \quad \frac{216 \text{ kg/m.}}{828 \text{ kg/m.}}$$

Si suponemos que las vigas tienen simple apoyo, la inclinación de la elástica en el apoyo será:

$$E_{\varphi\,ap} = \frac{q\,l^3}{24\,I_2} \qquad q = 82.8 \text{ kg/dm.} \qquad I_2 = 41.6 \text{ dm}^4 \qquad l = 50 \text{ dm.}$$

$$\text{y} \quad E_{\varphi\,ap} = \frac{82.8 \times 50^3}{24 \times 41.6} = 10400 \text{ kg/dm}^2.$$

Si comparamos este valor con el ángulo de rotación que proviene del momento de apoyo de la losa

$$E_{\varphi} = 45.28 \times 4770 = 216000 \text{ kg/dm}^2.$$

podremos ver su poca importancia.

Las conclusiones de este ejemplo no pueden tomarse en un sentido muy estricto ya que el problema es demasiado complejo para abordarlo con métodos tan simples, pero en todo caso podemos ver que la influencia de la resistencia de las vigas a la torsión, especialmente en el caso de una losa aislada, es de notoria importancia.

Bibliografía

1. A. Pucher:
Die Momenteneinflussfelder rechteckiger Platten.
W. Ernst u. Sohn. Berlin 1936.

2. H. Marcus:
Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten.
Berlin 1924.

3. H. Marcus:
Die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten.
Berlin 1929.

4. B. Loeser:
Bemessungsverfahren. Berlin. W. Ernst u. Sohn.

5. H. Bleich:
Berechnung kreuzweise bewehrter Eisenbetonplatten bei beliebiger Stellung der Verkehrslasten.
Beton u. Eisen 36 (1937).

6. E. Bittner:
Momententafeln und Einflussflächen für kreuzweise bewehrte Eisenbetonplatten.
Wien. 1938. Spinger.

7. G. Fischer:
Die Berechnung der Stahlfahrbahntafel der Bürgermeister - Smidt - Brücke in Bremen.
Der Stahlbau. 11 (1952).

8. G. Fischer:
Beitrag zur Berechnung kreuzweise gespannter.
Fahrbahnplatten im Stahlbrückenbau.
W. Ernst u. Sohn. Berlin 1952.

9. M. Mayer:
Neue Statik. Berlin 1942.

10. T. Hickerson:
Statically Indeterminate Frameworks.
Chapel-Hill. 1949.

11. S. Timoshenko:
Theory of plates and shells.
Mc. Graw-Hill 1940.

12. K. Girkmann:
Flächentragwerke. Wien 1946.

13. D. Lewe:
Pilzdecken und andere Trägerlose Eisenbetonplatten. Berlin 1930.

14. Foeppl-Sonntag:
Tafeln und Tabellen zur Festigkeitslehre. München 1951.

15. H. Fritz:
Biegungsbeanspruchung der rechteckigen. Platte als Wand eines Flüssigkeitsbehälters. Zürich. 1936.