

# **El cálculo de los pilares extremos en los edificios y construcciones análogas de hormigón armado**

COMENTARIO CRITICO DE LAS PRESCRIPCIONES CORRESPONDIENTES DE LAS «NORMAS PARA EL CALCULO Y LA CONSTRUCCION DE OBRAS DE HORMIGON ARMADO»

## I.—EL CÁLCULO SEGÚN LAS «NORMAS»

A menos que los pilares en los edificios y construcciones análogas no se calculen según la teoría de los marcos rígidos, admiten las «Normas» un cálculo aproximado que se indica en el párrafo 60 de dicha publicación. Este procedimiento de cálculo se refiere solamente a cargas verticales y tiene el siguiente desarrollo:

Los pilares intermedios se calculan como piezas solicitadas axialmente, es decir, sin considerar rigidez alguna en la unión de ellos con las vigas. En el cálculo de los pilares extremos se deben tomar en consideración los momentos solicitantes provenientes de la unión rígida de los pilares con el tramo extremo de la viga continua.



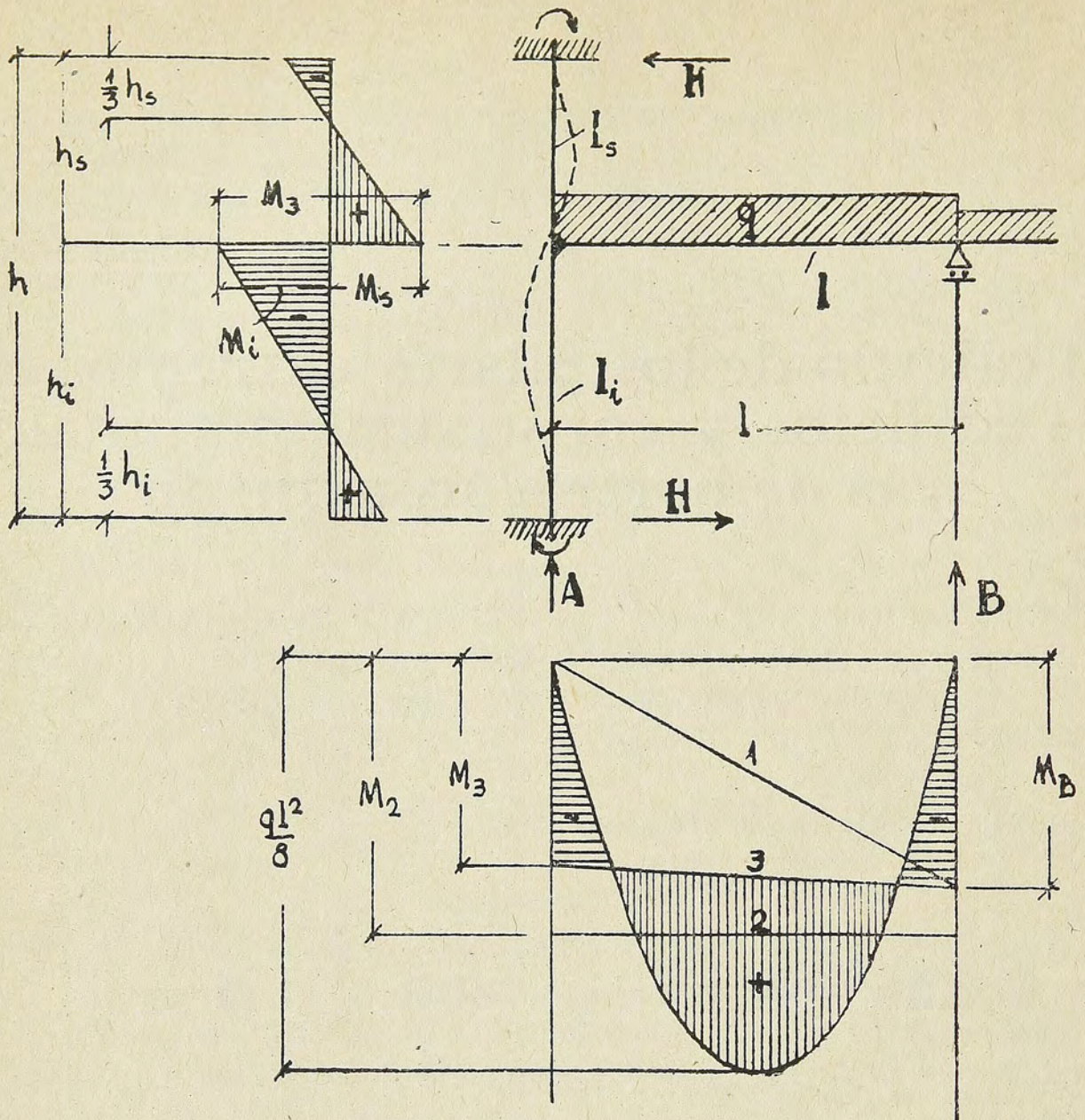


Fig. 1

Se adoptarán las notaciones siguientes:

$I$  momento de inercia del tramo extremo de la viga;

$I_s$  momento de inercia del pilar superior;

$I_i$  momento de inercia del pilar inferior;

$l$  longitud del tramo extremo de la viga;

$h_s$  altura del pilar superior;

$h_i$  altura del pilar inferior;

$h = h_s + h_i$ ;

$q$  carga total del tramo extremo de la viga uniformemente repartida, que sustituye la carga total real de esta pieza;

$M_2 = -\frac{ql^2}{12}$  momento de empotramiento del tramo extremo de la viga, si esta

pieza estuviese empotrada perfectamente en ambos apoyos.

Formando las expresiones:



$$(1) \quad \begin{cases} x_s = \frac{l}{h_s} \cdot \frac{I_s}{I} \\ x_i = \frac{l}{h_i} \cdot \frac{I_i}{I} \end{cases}$$

la magnitud del momento en el apoyo extremo de la viga resulta igual a

$$(2) \quad M_3 = M_2 \frac{x_s + x_i}{1 + x_s + x_i}$$

El momento en el extremo inferior del pilar superior  $M_s$  y el momento en el extremo superior del pilar inferior  $M_i$  se determinan según las fórmulas

$$(3) \quad \begin{cases} M_s = -M_3 \frac{x_s}{x_s + x_i} \\ M_i = M_3 \frac{x_i}{x_s + x_i} \end{cases}$$

La magnitud de la reacción horizontal de los apoyos asciende a

$$(4) \quad H = \frac{M_3}{\frac{2}{3}h}$$

Las secciones de los pilares en que los momentos se anulan quedan determinadas por sus distancias a los extremos:  $1/3 h_s$  del extremo superior del pilar superior, y  $1/3 h_i$  del extremo inferior del pilar inferior.

En el extremo superior del pilar superior y el extremo inferior son supuestos empotrados perfectamente.

Los diagramas de momentos están indicados en la fig. 1; en general no son paralelos. Los momentos que producen tensiones de compresión en el lado izquierdo de los pilares y en el nivel superior de la viga son designados positivos. En la fig. 1 corresponden los signos de los momentos y los sentidos de las reacciones de apoyo a la convención establecida, porque  $M_2$  (y por esto también  $M_3$ ) es negativo de por sí.

Las líneas 1, 2 y 3 significan:

- 1 = la línea de cierre del área de los momentos del tramo extremo de la viga con un apoyo ficticio de rótula en el pilar extremo;
- 2 = la línea de cierre del área de los momentos del tramo extremo de la viga, si aquél estuviese perfectamente empotrado en ambos apoyos;



3 = la línea de cierre del área de los momentos del tramo extremo de la viga, que determinan las dimensiones de este tramo.

Para el último piso se puede establecer:

$$\begin{array}{l} I_s = \theta \\ x_s = \theta \end{array} \left| \quad M_3 = M_2 \frac{x_i}{1 + x_i} \right. \quad \begin{array}{l} M_s = \theta \\ M_i = M_3 \end{array}$$

en que el signo  $\theta$  significa: no existe.

$x_i$  y  $H$  se determinan como en un piso intermedio.

La fig. 2 indica el procedimiento de cálculo para un edificio de tres pisos. Las dimensiones de los pilares deben determinarse según los momentos máximos y mínimos que salen de la aplicación del cálculo a dos pisos consecutivos. ¡Obsérvese las reacciones del terreno!

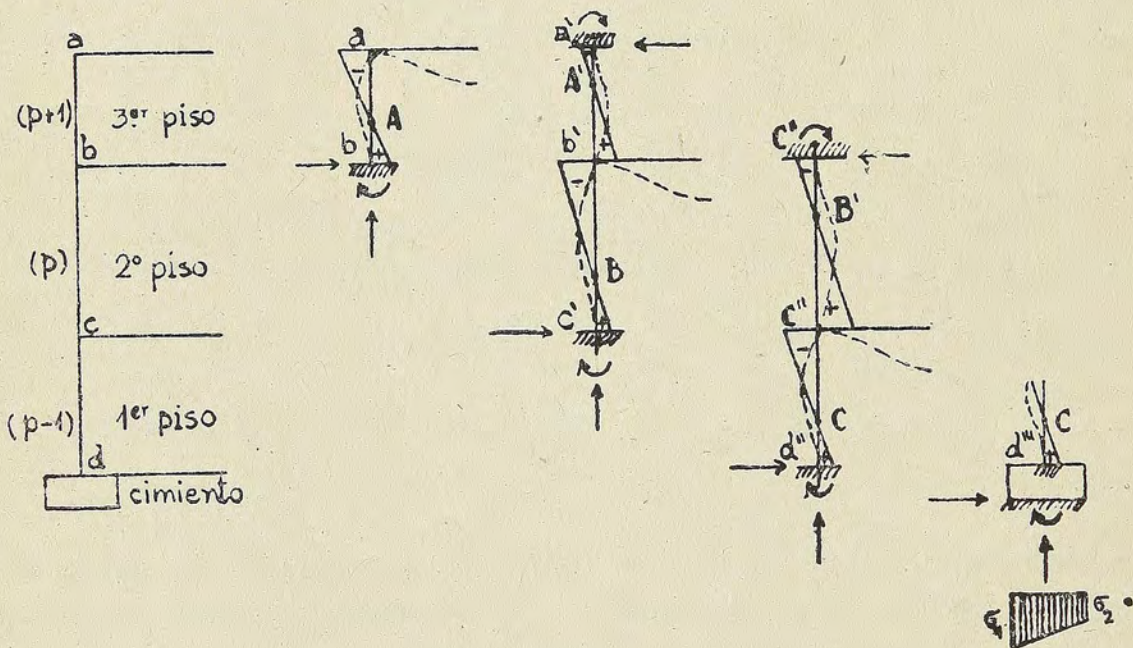


Fig. 2

Se ha hecho una explicación del método aproximado de cálculo que aconsejan las «Normas». Lo que llama la atención, en primer lugar es que este método fija arbitrariamente los puntos de inflexión de los pilares. Se trata de una barra recta empotrada en ambos extremos, solicitada por un momento  $M_3$  (Véase «caso principal» de la fig. 4).

La literatura que estudia en general este caso no lo investiga satisfactoriamente. En un compendio alemán (1) muy difundido (2) G. Rühth averigua solamente el caso especial  $I_s = I_i$ , y generaliza inadmisiblemente los resultados. En el comentario más conocido y aprovechado (3) de las normas alemanas (1), el autor B. Löser establece literalmente, sin comprobarlo, lo siguiente: «Los pilares extremos uni-

(1) Las «Normas» de Chile concuerdan con las de Alemania en las prescripciones que nos ocupan.

(2) Deutscher Betonverein: «Der Eisenbetonbau». Edición Konrad Wittwer, Stuttgart.

(3) B. Löser: «Bemessungsverfahren, etc.». Ed. Wilhelm Ernst & Sohn, Berlín.



dos (quiere decir unidos con la viga) se consideran perfectamente empotrados en sus extremos. Los puntos en que los momentos se anulan están situados, pues (!), en los puntos correspondientes a una división en tres partes iguales de las alturas de los pilares».

No obstante, a pesar de la afirmación anterior, se investigará el caso, En lo que sigue tenemos que determinar magnitudes estáticamente indeterminadas. Aplicamos con este objeto el método de Heinrich Müller-Breslau (1). A los lectores que no conocen este método, el capítulo II de esta publicación les informará sobre el procedimiento de cálculo correspondiente en todo lo que sea necesario para las investigaciones siguientes.

II.—DETERMINACIÓN DE LAS MAGNITUDES ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS EN UNA ESTRUCTURA RÍGIDA, SEGÚN HEINRICH MULLER-BRESLAU

Se establecerán las siguientes condiciones de cálculo: El módulo de elasticidad es constante; el trabajo de deformación proveniente de fuerzas normales y tangenciales, de variaciones de temperatura y de encogimiento del hormigón se desprecian; los apoyos se consideran indeseplazables.

El procedimiento de cálculo es el siguiente:

1) Se eliminan las magnitudes estáticamente indeterminadas  $X_a, X_b, X_c \dots$  y se transforma de esta manera el sistema dado en un sistema determinado o en un sistema indeterminado, cuyas magnitudes hiperestáticas son ya conocidas. («Caso principal»). En este sistema se calculan las reacciones de apoyo  $A_o, B_o, \dots$  los momentos  $M_o$ , las fuerzas normales  $N_o$  y las fuerzas transversales  $Q_o$ , producidas por la carga dada.

2) Eliminando la carga dada se expone el caso principal a la sollicitación exclusiva  $X_a = -1$  («Condición  $X_a = -1$ ») y se calculan las magnitudes correspondientes  $A_a, B_a, \dots, M_a, N_a$  y  $Q_a$ .

3) Se elimina la acción  $X_a = -1$  y se expone el caso principal a la sollicitación exclusiva  $X_b = -1$  («Condición  $X_b = -1$ »), calculándose las magnitudes correspondientes  $A_b, B_b, \dots, M_b, N_b$  y  $Q_b \dots$ .

4) Se procede análogamente con todas las magnitudes hiperestáticas:  $X_c, X_d \dots$

5) Las magnitudes incógnitas salen de las ecuaciones:

$$(5) \left\{ \begin{aligned} \int_0^s \frac{M_o M_a}{I} ds &= X_a \int_0^s \frac{M_a M_a}{I} ds + X_b \int_0^s \frac{M_a M_b}{I} ds + X_c \int_0^s \frac{M_a M_c}{I} ds + \dots \\ \int_0^s \frac{M_o M_b}{I} ds &= X_a \int_0^s \frac{M_b M_a}{I} ds + X_b \int_0^s \frac{M_b M_b}{I} ds + X_c \int_0^s \frac{M_b M_c}{I} ds + \dots \\ \int_0^s \frac{M_o M_c}{I} ds &= X_a \int_0^s \frac{M_c M_a}{I} ds + X_b \int_0^s \frac{M_c M_b}{I} ds + X_c \int_0^s \frac{M_c M_c}{I} ds + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

(1) Heinrich Müller-Breslau: «Die neueren Methoden der Festigkeitslehre». Ed. Alfred Kröner Leipzig.



Las integraciones deben hacerse a través de todas las barras del sistema.

6) Las magnitudes correspondientes en el sistema indeterminado resultan de las ecuaciones:

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} A = A_o - A_a X_a - A_b X_b - A_c X_c - \dots \\ B = B_o - B_a X_a - B_b X_b - B_c X_c - \dots \\ \dots \dots \dots \\ M = M_o - M_a X_a - M_b X_b - M_c X_c - \dots \\ N = N_o - N_a X_a - N_b X_b - N_c X_c - \dots \\ Q = Q_o - Q_a X_a - Q_b X_b - Q_c X_c - \dots \end{array} \right.$$

(7) Cuando las áreas de momentos se limitan por líneas rectas, parábolas o círculos, las ecuaciones (5) arrojan resultados muy sencillos; por ejemplo;

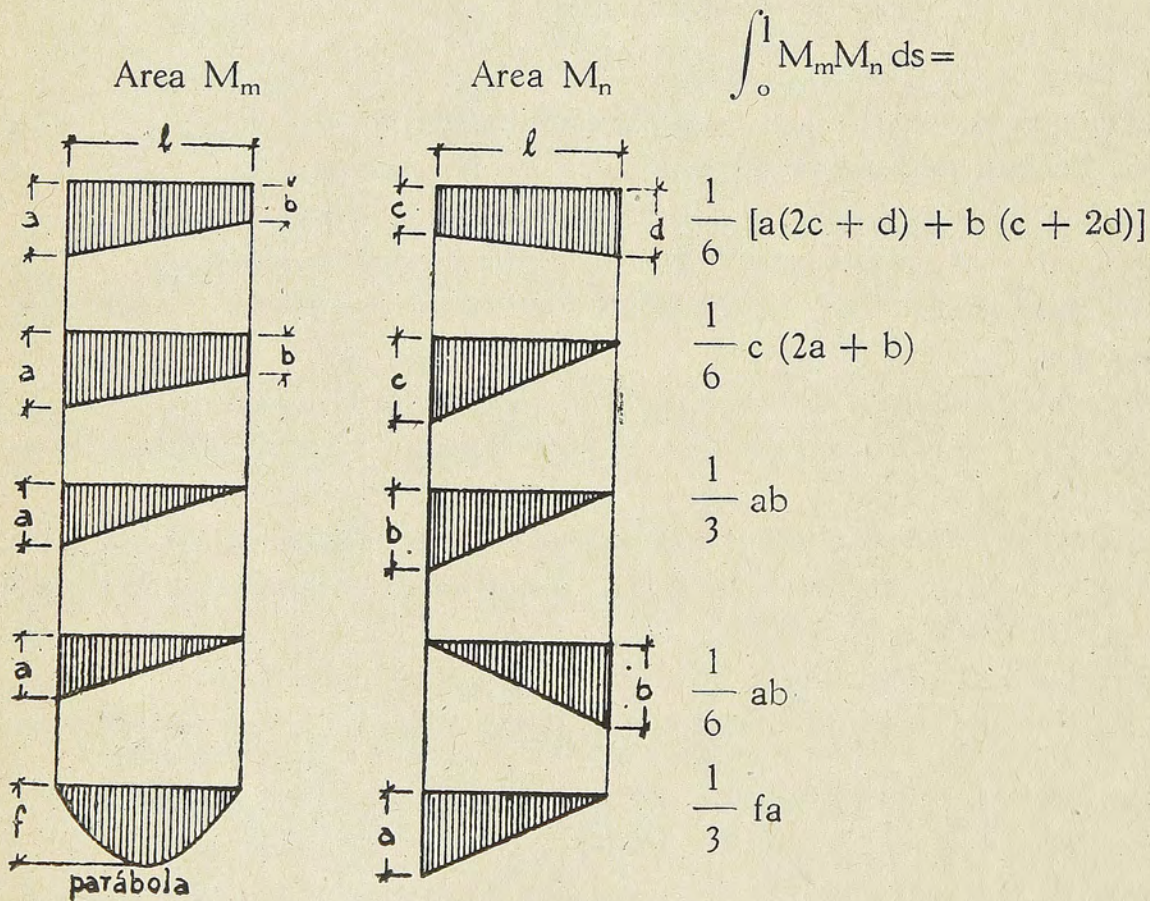


Fig. 3



III.—BARRA RECTA EMPOTRADA EN LOS EXTREMOS SOLICITADA POR UN MOMENTO

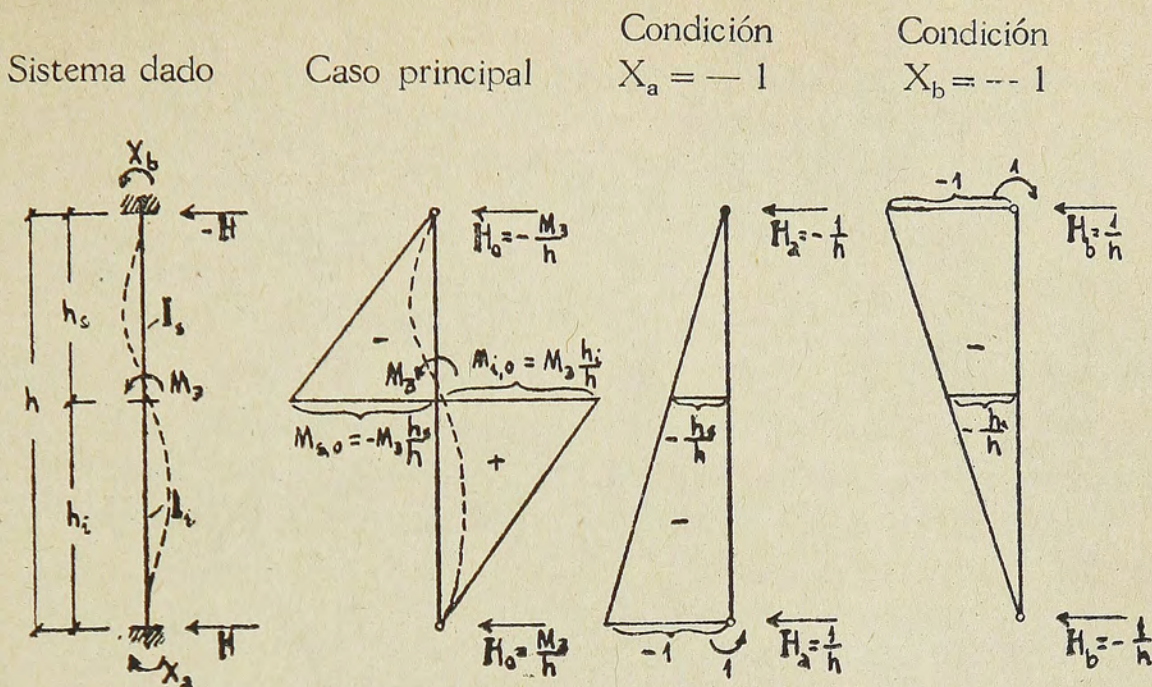


Fig. 4

El sistema dado muestra dos magnitudes hiperestáticas. Escogimos como tales los momentos de empotramiento  $X_a$  y  $X_b$  (Fig. 4).

a) Caso general

Según el método indicado en el capítulo II obtenemos:





$$\begin{aligned}
 \int_0^s \frac{M_o M_a}{I} ds &= \frac{1}{I_s} \left[ \frac{h_s}{3} - M_3 \frac{h_s}{h} - \frac{h_s}{h} \right] + \frac{1}{I_i} \left[ \frac{h_i}{6} \cdot M_3 \left( 2 - \frac{h_s}{h} - 1 \right) \right] = \\
 &= M_3 \left[ \frac{h_s^3}{3 I_s h^2} - \frac{h_i^2}{6 I_i h^2} (2h_s + h) \right] = M_3 \left[ \frac{h_s^3}{3 I_s h^2} - \frac{h_i^2}{6 I_i h^2} (3h - 2h_i) \right] = \\
 &= M_3 \left[ \frac{h_s^3}{3 I_s h^2} - \frac{h_i^3}{3 I_i h^2} - \frac{h_i^2}{2 I_i h} \right] \\
 \int_0^s \frac{M_o M_b}{I} ds &= M_3 \left[ -\frac{h_s^3}{3 I_s h^2} + \frac{h_i^3}{3 I_i h^2} + \frac{h_s^2}{2 I_s h} \right] \\
 \int_0^s \frac{M_a M_a}{I} ds &= \frac{1}{I_s} \left\{ \frac{h_s}{3} \cdot \frac{h_s^2}{h^2} \right\} + \frac{1}{I_i} \left\{ \frac{h_i}{6} \left[ \frac{h_s}{h} \left( 2 \frac{h_s}{h} + 1 \right) + \left( \frac{h_s}{h} + 2 \right) \right] \right\} = \\
 (7) \quad &= \frac{1}{I_s} \frac{h_s^3}{3 h^2} + \frac{1}{I_i} h_i \left[ \frac{h_s^2}{3 h^2} + \frac{h_s}{3 h} + \frac{1}{3} \right] = \\
 &= \frac{1}{I_s} \frac{h_s^3}{3 h^2} + \frac{1}{I_i} h_i \left[ \frac{h_i^2}{3 h^2} - \frac{h_i}{h} + 1 \right] = \\
 &= \frac{1}{I_s} \frac{h_s^3}{3 h^2} + \frac{1}{I_s} \frac{h_i^3}{3 h^2} + \frac{1}{I_s} \frac{h_s h_i}{h} \\
 \int_0^s \frac{M_b M_b}{I} ds &= \frac{1}{I_s} \frac{h_s^3}{3 h^2} + \frac{1}{I_i} \frac{h_i^3}{3 h^2} + \frac{1}{I_s} \frac{h_s h_i}{h} \\
 \int_0^s \frac{M_a M_b}{I} ds &= \frac{1}{I_s} \frac{h_s}{6} \frac{h_s}{h} \left( 2 \frac{h_i}{h} + 1 \right) + \frac{1}{I_i} \frac{h_i}{6} \frac{h_i}{h} \left( 2 \frac{h_s}{h} + 1 \right) = \\
 &= \frac{1}{I_s} \frac{h_s^2}{6 h^2} (3h - 2h_s) + \frac{1}{I_i} \frac{h_i^2}{6 h^2} (3h - 2h_i)
 \end{aligned}$$

Los valores de las ecuaciones (7) tenemos que sustituirlos en las ecuaciones (8):



$$(8) \begin{cases} \int_0^s \frac{M_o M_a}{I} ds = X_a \int_0^s \frac{M_a M_a}{I} ds + X_b \int_0^s \frac{M_a M_b}{I} ds \\ \int_0^s \frac{M_o M_b}{I} ds = X_a \int_0^s \frac{M_b M_a}{I} ds + X_b \int_0^s \frac{M_b M_b}{I} ds \end{cases}$$

de las cuales se obtienen las incógnitas:

$$(9) \quad X_a = \dots, \quad X_b = \dots,$$

La solución del sistema de ecuaciones (8), introducidos los valores (7), conduce, en el caso general a expresiones muy complicadas. Por eso solucionaremos estas ecuaciones solamente en casos especiales. Además obtenemos:

$$(10) \quad H = H_o - H_a X_a - H_b X_b = \frac{M_3}{h} - \frac{1}{h} X_a + \frac{1}{h} X_b = \frac{1}{h} (M_3 - X_a + X_b)$$

$$(11) \quad \begin{cases} M_s = M_{s,o} - M_{s,a} X_a - M_{s,b} X_b = -M_3 \frac{h_s}{h} + \frac{h_s}{h} X_a + \frac{h_i}{h} X_b = \\ = -M_3 \frac{h_s}{h} + \frac{h_s}{h} X_a + \left(1 - \frac{h_s}{h}\right) X_b = X_b - \frac{h_s}{h} (M_3 - X_a + X_b) = \\ = X_b - H h_s \\ M_i = M_{i,o} - M_{i,a} X_a - M_{i,b} X_b = M_3 \frac{h_i}{h} + \frac{h_s}{h} X_a + \frac{h_i}{h} X_b = \\ = X_a + H h_i \end{cases}$$

Pruebas:

$$(12) \quad \begin{cases} \text{Debe ser: } M_3 = -M_s + M_i \\ \text{Deben ser paralelos los diagramas de momentos en las partes } h_s \text{ y } h_i. \end{cases}$$

### Ejemplo 1

La altura del primer piso de un edificio es 300 cm., la del segundo 450 cm. (Fig. 5). El pilar superior tiene una sección transversal de 30/36,3 cm. con  $I_s \approx 4000 \text{ cm}^4$  (1), el pilar inferior es de 30/47,7 cm  $I_i \approx 9000 \text{ cm}^4$  (1).

(1) Como las secciones transversales de ambos pilares tienen profundidades iguales (=30 cm.), se podía simplificar el cálculo numérico, calculándose  $I_s$  e  $I_i$  con una profundidad igual a 1 cm.



De las ecuaciones (7) resulta:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^s \frac{M_o M_a}{I} ds &= M_3 \left[ \frac{450^3}{3 \cdot 4000 \cdot 750^2} + \frac{300^3}{3 \cdot 9000 \cdot 750^2} - \frac{300^2}{2 \cdot 9000 \cdot 750} \right] = 0,00862 M_3 \\ \int_0^s \frac{M_o M_b}{I} ds &= M_3 \left[ -\frac{450^3}{3 \cdot 4000 \cdot 750^2} - \frac{300^3}{3 \cdot 9000 \cdot 750^2} + \frac{450^2}{2 \cdot 4000 \cdot 750} \right] = 0,01950 M_3 \\ \int_0^s \frac{M_a M_a}{I} ds &= \frac{450^3}{3 \cdot 4000 \cdot 750^2} + \frac{300^3}{3 \cdot 9000 \cdot 750^2} + \frac{450 \cdot 300}{9000 \cdot 7500} = 0,03529 \\ \int_0^s \frac{M_b M_b}{I} ds &= \frac{450^3}{3 \cdot 4000 \cdot 750^2} + \frac{300^3}{3 \cdot 9000 \cdot 750^2} + \frac{450 \cdot 300}{4000 \cdot 750} = 0,06029 \\ \int_0^s \frac{M_a M_b}{I} ds &= \frac{450^2}{6 \cdot 4000 \cdot 750^2} (3 \cdot 750 - 2 \cdot 450) + \frac{300^2}{6 \cdot 9000 \cdot 750} (3 \cdot 750 - 2 \cdot 300) = \\ &= 0,02432 \end{aligned} \right.$$

Estos valores tenemos que sustituirlos en las ecuaciones (8):

$$\begin{cases} 0,00862 \cdot M_3 = X_a \cdot 0,03529 + X_b \cdot 0,02432 \\ 0,01950 \cdot M_3 = X_a \cdot 0,02432 + X_b \cdot 0,06029 \end{cases}$$

de las cuales resulta:

$$\begin{cases} X_a = 0,0324 \cdot M_3 \\ X_b = 0,3110 \cdot M_3 \end{cases}$$

La ecuación (9) arroja:

$$H = \frac{1}{750} (M_3 - 0,0324 \cdot M_3 + 0,3110 \cdot M_3) = 0,001704 \cdot M_3$$

De las ecuaciones (10) obtenemos:

$$\begin{cases} M_s = 0,3110 \cdot M_3 - 0,001704 \cdot M_3 \cdot 450 = -0,456 \cdot M_3 \\ M_i = 0,0324 \cdot M_3 + 0,001704 \cdot M_3 \cdot 300 = +0,544 \cdot M_3 \end{cases}$$

Estos resultados aparecen trazados a escala en la fig. 5 con líneas llenas.



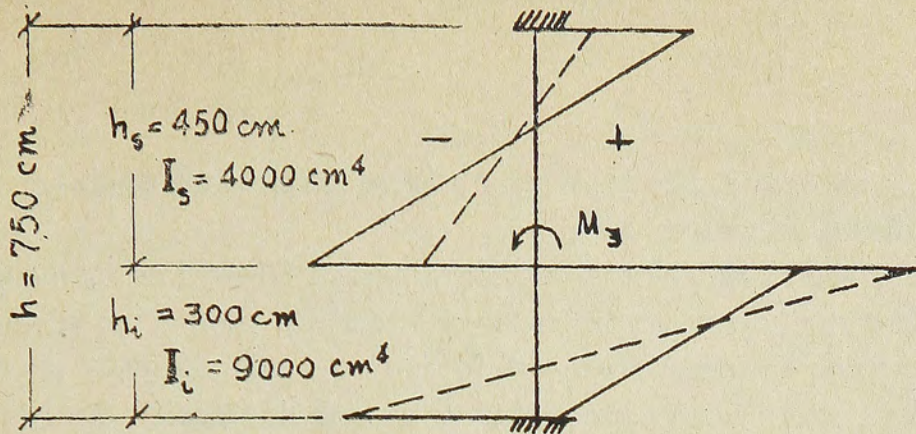


Fig. 5

Diagrama de momentos según el cálculo exacto. —

Diagrama de momentos según las «Normas».....

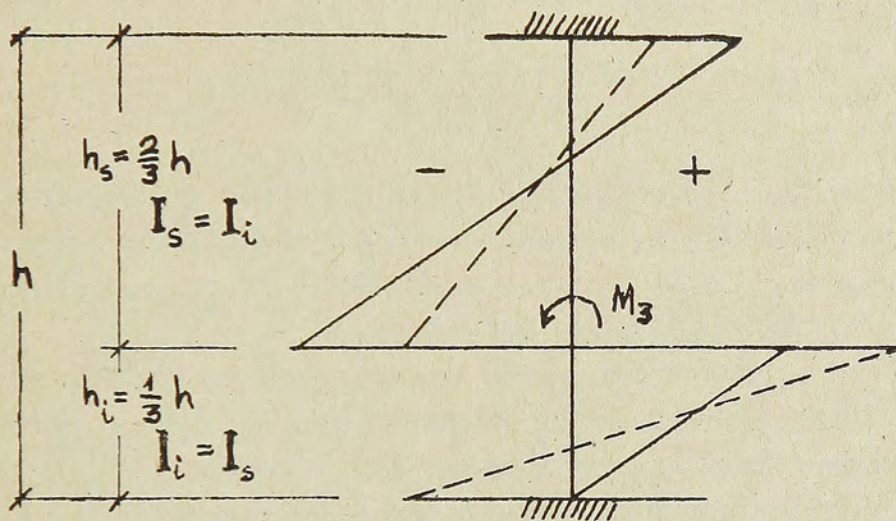


Fig. 6

Diagrama de momentos según el cálculo exacto. —

Diagrama de momentos según las «Normas» .....

A continuación se calcularán los valores correspondientes que arrojan las fórmulas (1), (3) y (4) de las «Normas». Obtenemos:

$$\begin{cases} x_s = \frac{1}{450} \cdot \frac{4000}{I} = \frac{80}{9} \frac{1}{I} \\ x_i = \frac{1}{300} \cdot \frac{9000}{I} = 30 \frac{1}{I} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_s = -M_3 \frac{\frac{80}{9} \frac{1}{I}}{\frac{80}{9} \frac{1}{I} + 30 \frac{1}{I}} = -0,228 \cdot M_3 \\ M_i = M_3 \frac{30 \frac{1}{I}}{\frac{80}{9} \frac{1}{I} + 30 \frac{1}{I}} = 0,772 \cdot M_3 \end{cases}$$



$$H = \frac{M_3}{\frac{2}{3} \cdot 750} = 0,00200 \cdot M_3$$

Los diagramas de momentos según estos resultados se encuentran también trazados en la fig. 5 con líneas interrumpidas.

Vemos que el cálculo según las «Normas» da resultados falsos. Los momentos obtenidos no concuerdan ni siquiera aproximadamente con los momentos exactos; aun el signo del momento de empotramiento en la base del pilar inferior resulta falso. Bien podrían inducir estas faltas a colocar la armadura de tracción en el lado de compresión del pilar; fuera de eso, ellas podrían causar un cálculo falso de un cimiento eventual bajo el pilar inferior.

La cuestión primordial es la ubicación de los puntos en que el diagrama de momentos se anula. Nos preguntamos ¿qué condiciones deben cumplirse para que la situación de estos puntos sea la misma según que se calcule con el procedimiento exacto o con el aproximado recomendado por las «Normas»?

La solución general del problema por medio de las ecuaciones (7), (8), (9) y (10) sería muy fatigosa. Es preferible tratar de obtener la solución general por medio del estudio de casos especiales. No cabe duda de que las condiciones buscadas deben consistir en una relación todavía desconocida entre las magnitudes  $I_s$ ,  $I_i$ ,  $h_s$  y  $h_i$ . Investigamos por ahora el

b) Caso especial  $I_s = I_i$

Substituimos la relación  $I_s = I_i$  en las ecuaciones (7) y calculamos las expresiones  $\int_0^s M_a M_a ds$ ,  $\int_0^s M_a M_b ds$ , etc. Con los valores así obtenidos, y después de una transformación sencilla, las ecuaciones (8), (9), (10) y (11) toman la forma de las ecuaciones siguientes:

$$(8b) \quad \begin{cases} -M_3 \left[ 1 - 3 \left( \frac{h_s}{h} \right)^2 \right] = 2 X_a + X_b \\ M_3 \left[ 1 - 3 \left( \frac{h_i}{h} \right)^2 \right] = X_a + 2 X_b \end{cases}$$

$$(9b) \quad \begin{cases} X_a = \frac{h_s}{h} \left( 3 \frac{h_s}{h} - 2 \right) \cdot M_3 \\ X_b = -\frac{h_i}{h} \left( 3 \frac{h_i}{h} - 2 \right) \cdot M_3 \end{cases}$$



$$(10b) \quad H = \frac{6 h_s h_i}{h^3} \cdot M_3$$

$$(11b) \quad \begin{cases} M_s = X_b - H h_s \\ M_i = X_a + H h_i \end{cases}$$

EJEMPLO 2.

$$\text{Sea } \frac{h_s}{h} = \frac{2}{3}, \quad \frac{h_i}{h} = \frac{1}{3}$$

Las ecuaciones (9b), (10b) y (11b) arrojan:

$$\begin{cases} X_a = \frac{2}{3} \left( 2 \cdot \frac{2}{3} - 2 \right) \cdot M_3 = \theta \\ X_b = -\frac{1}{3} \left( 3 \cdot \frac{1}{3} - 2 \right) \cdot M_3 = + \frac{1}{3} M_3 \end{cases}$$

$$H = \frac{6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{h} \cdot M_3 = \frac{4}{3} \frac{M_3}{h}$$

$$\begin{cases} M_s = \frac{1}{3} M_3 - \frac{4}{3} \frac{M_3}{h} \cdot \frac{2}{3} h = -\frac{5}{9} M_3 \\ M_i = \theta + \frac{4}{3} \frac{M_3}{h} \cdot \frac{1}{3} h = +\frac{4}{9} M_3 \end{cases}$$

Estos resultados están trazados a escala en la fig. 6 con líneas llenas.

Para comparar los resultados calculamos el ejemplo según las ecuaciones (1), (3) y (4) de las «Normas».

$$\begin{cases} x_s = \frac{1}{\frac{2}{3} h} \cdot \frac{I_s}{I} = \frac{3}{2} \frac{1}{h} \cdot \frac{I_s}{I} \\ x_i = \frac{1}{\frac{1}{3} h} \cdot \frac{I_s}{I} = 3 \frac{1}{h} \cdot \frac{I_s}{I} \end{cases}$$



$$\left\{ \begin{aligned} M_s &= -M_3 \frac{\frac{3}{2} \frac{1}{h} \frac{I_s}{I} + 3 \frac{1}{h} \cdot \frac{I_s}{I}}{\frac{3}{2} \frac{1}{h} \frac{I_s}{I} + 3 \frac{1}{h} \cdot \frac{I_s}{I}} = -\frac{1}{3} M_3 \\ M_i &= M_3 \frac{3 \frac{1}{h} \frac{I_s}{I}}{\frac{3}{2} \frac{1}{h} \frac{I_s}{I} + 3 \frac{1}{h} \cdot \frac{I_s}{I}} = +\frac{2}{3} M_3 \end{aligned} \right.$$

$$H = \frac{M_3}{\frac{2}{3} h} = \frac{3}{2} \frac{M_3}{h}$$

Estos resultados se encuentran inscritos también en la fig. 6 con líneas interrumpidas.

En este ejemplo el cálculo según las «Normas» no constituye tampoco un método aproximado utilizabie.

EJEMPLO 3.

$$\text{Sea } \frac{h_s}{h} = \frac{h_i}{h} = \frac{1}{2}$$

Las fórmulas exactas (9b), (10b) y (11b) nos dan:

$$\left\{ \begin{aligned} X_a &= \frac{1}{2} \left( 3 \cdot \frac{1}{2} - 2 \right) \cdot M_3 = -\frac{1}{4} \cdot M_3 \\ X_b &= -\frac{1}{2} \left( 3 \cdot \frac{1}{2} - 2 \right) \cdot M_3 = +\frac{1}{4} \cdot M_3 \end{aligned} \right.$$

$$H = \frac{6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{h} \cdot M_3 = \frac{3}{2} \frac{M_3}{h}$$

$$\left\{ \begin{aligned} M_s &= \frac{1}{4} M_3 - \frac{3}{2} \frac{M_3}{h} \frac{h}{2} = -\frac{1}{2} M_3 \\ M_i &= -\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \frac{M_3}{h} \frac{h}{2} = +\frac{1}{2} M_3 \end{aligned} \right.$$



De las fórmulas (1), (3) y (4) de las «Normas» resulta:

$$\left\{ \begin{aligned} x_s &= \frac{1}{\frac{1}{2} h} \frac{I_s}{I} = 2 \frac{1}{h} \frac{I_s}{I} \\ x_i &= \frac{1}{\frac{1}{2} h} \frac{I_s}{I} = 2 \frac{1}{h} \frac{I}{I} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} M_s &= -M_3 \frac{2}{2+2} = -\frac{1}{2} M_3 \\ M_i &= M_3 \frac{2}{2+2} = +\frac{1}{2} M_3 \end{aligned} \right.$$

$$H = \frac{M_3}{\frac{2}{3} h} = \frac{3}{2} \frac{M_3}{h}$$

Los resultados según ambos métodos concuerdan exactamente. En el caso en que los momentos de inercia de dos pilares consecutivos sean iguales y las alturas de pisos sean iguales también, las fórmulas de las «Normas» dan resultados exactos.

Lo que llama la atención en el caso b) es que en las ecuaciones (8b) interviene la razón de los cuadrados de las alturas, lo que hace pensar que la relación

$\frac{I_s}{I_i} = \left( \frac{h_s}{h_i} \right)^2$  nos permitirá llegar al resultado que se persigue.

Escribimos esta relación en la forma

$$(13b) \quad \frac{I_s}{h_s^2} = \frac{I_i}{h_i^2} = k,$$

en que k representa una magnitud constante. Averiguamos, pues, el

c) *Caso especial:*

$$\frac{I_s}{h_s^2} = \frac{I_i}{h_i^2} = k$$

Substituyendo esta relación en las ecuaciones (7) obtenemos:



$$(7c) \left\{ \begin{aligned} \int_0^s \frac{M_o M_a}{I} ds &= M_3 \left[ \frac{h_s}{3k h^2} + \frac{h_i}{3k h^2} - \frac{1}{2kh} \right] = -M_3 \frac{1}{6kh} \\ \int_0^s \frac{M_o M_b}{I} ds &= \phantom{M_3 \left[ \frac{h_s}{3k h^2} + \frac{h_i}{3k h^2} - \frac{1}{2kh} \right]} = +M_3 \frac{1}{6kh} \\ \int_0^s \frac{M_a M_a}{I} ds &= \frac{h_s}{3k h^2} + \frac{h_i}{3k h^2} + \frac{1}{kh} \frac{h_s}{h_i} = \frac{1}{kh} \left( \frac{1}{3} + \frac{h_s}{h_i} \right) \\ \int_0^s \frac{M_b M_b}{I} ds &= \phantom{\frac{h_s}{3k h^2} + \frac{h_i}{3k h^2} + \frac{1}{kh} \frac{h_s}{h_i}} = \frac{1}{kh} \left( \frac{1}{3} + \frac{h_i}{h_s} \right) \\ \int_0^s \frac{M_a M_b}{I} ds &= \frac{1}{6k h^2} (3h - 2h_s) + \frac{1}{6k h^2} (3h - 2h_i) = \frac{2}{3kh} \end{aligned} \right.$$

Las ecuaciones (8) toman la forma

$$(8c) \left\{ \begin{aligned} -M_3 &= X_a \left( 2 + 6 \frac{h_s}{h_i} \right) + X_b 4 \\ +M_3 &= X_a \cdot 4 + X_b \left( 2 + 6 \frac{h_i}{h_s} \right) \end{aligned} \right.$$

De las cuales resultan

$$(9c) \left\{ \begin{aligned} X_a &= -\frac{1}{2} M_3 \frac{h_i}{h} \\ X_b &= +\frac{1}{2} M_3 \frac{h_s}{h} \end{aligned} \right.$$

De las ecuaciones (10) y (11) se obtiene:

$$(10c) \quad H = \frac{1}{h} \left( M_3 + \frac{1}{2} M_3 \frac{h_i}{h} + \frac{1}{2} M_3 \frac{h_s}{h} \right) = \frac{M_3}{\frac{2}{3} h}$$

$$(11c) \left\{ \begin{aligned} M_s &= \frac{1}{2} M_3 \frac{h_s}{h} - \frac{M_3}{\frac{2}{3} h} h_s = -M_3 \frac{h_s}{h} \\ M_i &= \phantom{\frac{1}{2} M_3 \frac{h_s}{h} - \frac{M_3}{\frac{2}{3} h} h_s} = +M_3 \frac{h_i}{h} \end{aligned} \right.$$



Como  $M_s = -2 X_b$  y  $M_i = -2 X_a$ , deben resultar las distancias de los puntos en que los momentos son nulos iguales a  $\frac{h_s}{3}$  de la cabeza del pilar  $h_s$  y  $\frac{h_i}{3}$  de la base del pilar inferior.

¿Qué resultado dan las fórmulas (1), (3) y (4) de las «Normas» en este caso especial? Por sustitución de la relación (13) en esas fórmulas obtenemos:

$$(1c) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_s = \frac{1}{h_s} \frac{I_s}{I} = \frac{1}{I} k h_s \\ x_i = \frac{1}{h} \frac{I_i}{I} = \frac{1}{I} k h_i \end{array} \right.$$

$$(3c) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_s = -M_3 \frac{\frac{1}{I} k h_s}{\frac{1}{I} k h_s + \frac{1}{I} k h_i} = -M_3 \frac{h_s}{h} \\ M_i = M_3 \frac{\frac{1}{I} k h_s}{\frac{1}{I} k h_s + \frac{1}{I} k h_i} = +M_3 \frac{h_i}{h} \end{array} \right.$$

$$(4c) \quad H = \frac{M_3}{\frac{2}{3} h}$$

Es decir, lo que se había previsto resultó cierto: Los resultados de las fórmulas de las «Normas» concuerdan con los del cálculo exacto solamente en el caso en que se verifique la relación (13):  $\frac{I_s}{h_s^2} = \frac{I_i}{h_i^2} = k$ .

#### Ejemplo 4

En este ejemplo la condición (13) se cumple, porque (1)

---

(1) Véase la nota al pie de la pág. 79.



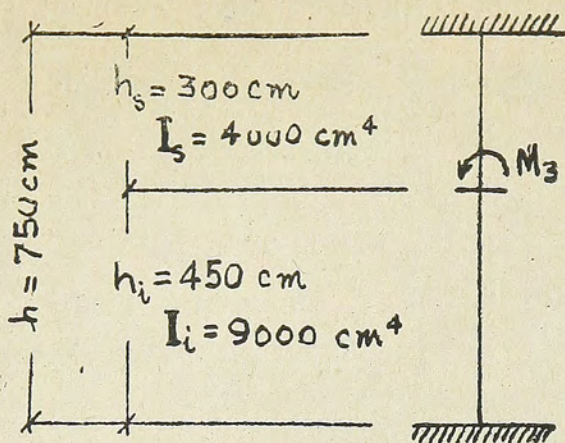


Fig. 7.

$$k = \frac{I_s}{h_s^2} = \frac{4000}{300^2} = 0,0444 \text{ cm}^2$$

$$k = \frac{I_i}{h_i^2} = \frac{9000}{450^2} = 0,0444 \text{ cm}^2$$

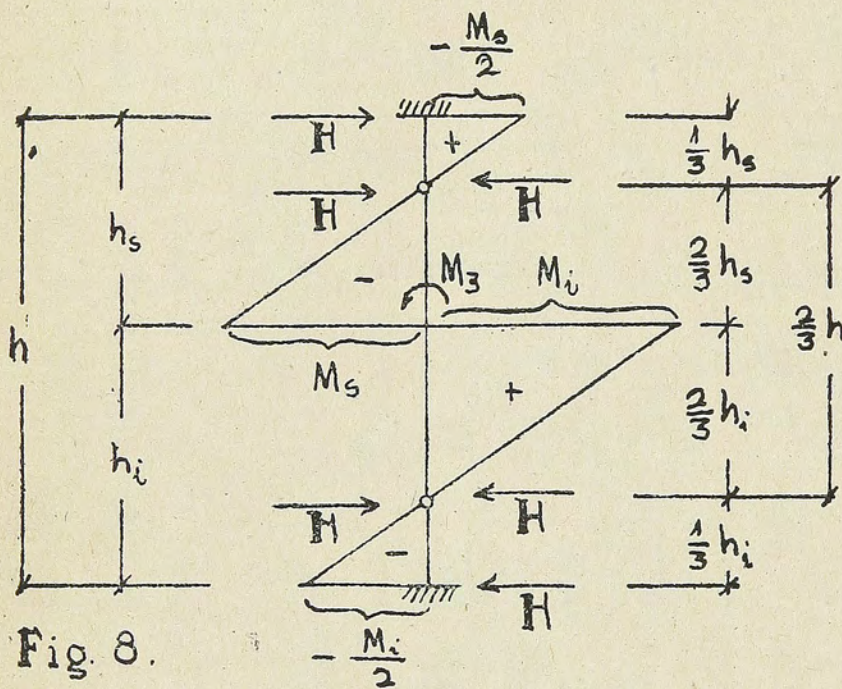


Fig. 8.

Las ecuaciones (9c), (10c) y (11c) nos dan:

$$\begin{cases} X_a = -\frac{1}{2} M_3 \frac{450}{750} = -0,300 M_3 \\ X_b = \frac{1}{2} M_3 \frac{300}{750} = +0,200 M_3 \end{cases}$$

$$H = \frac{M_3}{\frac{2}{3} \cdot 750} = 0,002 M_3$$

$$\begin{cases} M_s = -M_3 \frac{300}{750} = -0,400 M_3 \\ M_i = +M_3 \frac{450}{750} = +0,600 M_3 \end{cases}$$



De las ecuaciones (1), (3) y (4) de las «Normas» resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_s = \frac{1}{300} \frac{4000}{I} = 13,33 \frac{1}{I} \\ x_i = \frac{1}{450} \frac{9000}{I} = 20,00 \frac{1}{I} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_s = - M_3 \frac{13,33 \frac{1}{I}}{13,33 \frac{1}{I} + 20 \frac{1}{I}} = - 0,400 M_3 \\ M_i = + M_3 \frac{20 \frac{1}{I}}{13,33 \frac{1}{I} + 20 \frac{1}{I}} = + 0,600 M_3 \end{array} \right.$$

$$H = \frac{M_3}{\frac{2}{3} \cdot 750} = 0,002 M_3$$

Como se ve, los resultados obtenidos en ambos procedimientos de cálculo son idénticos.

#### IV.—BARRA RECTA EMPOTRADA EN AMBOS EXTREMOS CON DOS ARTICULACIONES INTERMEDIAS SOLICITADA POR UN MOMENTO

Se pudo llegar a la ecuación de condición (13) por una vía mucho más corta. Pero el autor creyó un deber conducir al lector a lo largo del camino que él mismo recorrió cuando estudió el problema. Por otra parte, de esta manera el lector puede darse cuenta mejor del fondo del problema que aquí se estudia.

La fijación absoluta e independiente de los varios casos de carga de un punto de cero de los momentos significa la colocación de una articulación ficticia en este punto.

Según las indicaciones de las «Normas» se nos presenta, pues, el sistema de la fig. 8 con las articulaciones dibujadas a las alturas que allí aparecen. El sistema es estáticamente determinado y de la ecuación de momentos respecto a una articulación se obtiene: •

$$H = \frac{M_3}{\frac{2}{3} h}$$



de lo que resulta

$$\begin{cases} M_s = -H \cdot \frac{2}{3} h_s = -M_3 \frac{h_s}{h} \\ M_i = H \cdot \frac{2}{3} h_i = +M_3 \frac{h_i}{h} \end{cases}$$

En efecto, estas ecuaciones concuerdan con los resultados obtenidos anteriormente; a saber, con las ecuaciones (10c) y (11c).

Las magnitudes así obtenidas deben concordar también con las de las ecuaciones (3) de las «Normas». Las condiciones para que las ecuaciones (3) den resultados exactos son, pues:

$$\begin{cases} -M_3 \frac{h_s}{h} = -M_3 \frac{x_s}{x_s + x_i} \\ M_3 \frac{h_i}{h} = M_3 \frac{x_i}{x_s + x_i} \end{cases},$$

o, teniendo presente las ecuaciones (1)

$$\begin{cases} \frac{h_s}{h} = \frac{\frac{1}{h_s} \frac{I_s}{I}}{\frac{1}{h_s} \frac{I_s}{I} + \frac{1}{h_i} \frac{I_i}{I}} = \frac{\frac{I_s}{h_s}}{\frac{I_s}{h_s} + \frac{I_i}{h_i}} \\ \frac{h_i}{h} = \frac{\frac{1}{h_i} \frac{I_i}{I}}{\frac{1}{h_s} \frac{I_s}{I} + \frac{1}{h_i} \frac{I_i}{I}} = \frac{\frac{I_i}{h_i}}{\frac{I_s}{h_s} + \frac{I_i}{h_i}} \end{cases}$$

Multiplicando estas ecuaciones por  $\left(\frac{I_s}{h_s} + \frac{I_i}{h_i}\right) (h_s + h_i)$  se obtiene:

$$\begin{cases} I_s + I_i \frac{h_s}{h_i} = \frac{I_s}{h_s} (h_s + h_i) \\ I_s \frac{h_i}{h_s} + I_i = \frac{I_i}{h_i} (h_s + h_i) \end{cases}$$



y por reducción

$$\left\{ \begin{array}{l} I_i \frac{h_s}{h_i} = I_s \frac{h_i}{h_s} \\ I_s \frac{h_i}{h_s} = I_i \frac{h_s}{h_i} \end{array} \right.$$

Las últimas ecuaciones son iguales entre sí y dan otra vez la ecuación de condición (13) para la validez exacta de las ecuaciones (3):

$$(13) \quad \frac{I_s}{h_s^2} = \frac{I_i}{h_i^2} = k$$

En el caso, en que se cumpla la condición (13) no son necesarias las ecuaciones (1) y (3) para la determinación de las magnitudes  $M_s$  y  $M_i$ , sino que basta aplicar las ecuaciones

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_s = - M_3 \frac{h_s}{h} \\ M_i = + M_3 \frac{h_i}{h} \end{array} \right.$$

(Continuará)

---