ESTUDIO SOBRE LAS LEYES DEL MOVIMIENTO

DE LAS AGUAS SUBTERRÁNEAS

De las aguas que caen sobre nuestro planeta en forma de lluvias, nevazones, etc, una parte pasa a la atmósfera por medio de la evaporacion, otra parte absorven las plantas i el resto escurre, segun las leyes de gravitacion, unas sobre la superficie de la tierra en forma de arroyos, esteros i rios, i otras infiltran en el seno de la tierra.

Las aguas infiltradas atraviesan las diferentes capas jeolójicas hasta encontrar una capa impermeable en donde se acumulan poco a poco desalojando el aire contenido en los poros de las capas permeables i constituyendo pequeñas o grandes lagunas segun las desigualdades de la superficie de ésta.

Cuando la cantidad de agua infiltrada es enorme se forman entónces grandes corrientes, cuyas direcciones dependen de la inclinacion jeneral de la capa impermeable. Si ésta llega a la superficie de la tierra veremos ahí aparecer las aguas subterráneas en forma de vertientes que constituirán arroyos, lagunas, rios, etc., i es así como llegan al mar.

Las aguas subterráneas se encuentran pues en la naturaleza exactamente en las mismas diferentes formas que las aguas superficiales.

La cantidad de agua infiltrada en el seno de la tierra es mui grande.

Segun Delesse esta cantidad es mas o ménos 1278900 billones de metros cúbicos, o sea las 845 avas partes del volúmen de nuestra tierra.

Para el abastecimiento de agua potable, las aguas subterráneas tienen la preferencia: por el movimiento en las capas permeables han alcanzado un grado de temperatura mui a propósito, i por medio de la infiltracion se han purificado de tal manera que pueden servir directamente como agua potable sin necesidad de ningun tratamiento especial.

Esta purificacion se refiere sobre todo a la cantidad de bacterias, las cuales desaparecen casi completamente habiendo, entre el nivel de las aguas subterráneas i la superficie de la tierra, una capa jeolójica bastante gruesa i compacta.

Gracias a los conocimientos que ha adquirido últimamente la ciencia respecto a las aguas subterráneas i a su movimiento, muchas veces es posible encontrar en los alrededores de las ciudades i pueblos, la cantidad de aguas subterráneas necesarias para el abastecimiento de ellos.

A estas circunstancias debemos el hecho que, en los últimos 20 años, la mayor parte

de las obras de abastecimiento de agua potable en Europa, sobre todo en Alemania, Austria, Francia e Italia, tienen por base el aprovechamiento de las corrientes subterráneas.

Con la importancia que han ganado así las aguas subterráneas, se ha sentido mas la necesidad de conocer las leyes que se refieren al movimiento de ellas. Estas leyes nos sirven al mismo tiempo para poder calcular la abundancia de las captaciones de dichas aguas.

La lei mas conocida referente al movimiento del agua por materiales permeables es la lei de filtracion de Darcy.

Darcy dedujo por medio de esperimentos una lei referente a la cantidad de agua que pasa por un filtro artificial, i formó, basándose en varios esperimentos hechos con filtros artificiales de diferentes dimensiones, la fórmula siguiente:

$$H = \frac{Q\ e}{k_0\ F} \qquad (1)$$

en la cual significa:

F la seccion constante del filtro;

e la altura del filtro;

Q la cantidad de agua filtrada en la unidad de tiempo;

H la diferencia de los dos niveles, es decir la carga; i k_0 un coeficiente que depende de la naturaleza del material filtrante.

Los aparatos de ensayo que le sirvieron a Darcy i los resultados de sus esperimentos han sido descritos en su obra: «*Les fontaines publiques de la ville de Dijon.*» Paris, 1856.

En la fórmula de Darcy significa F toda la seccion del filtro, pero para poder calcular la velocidad del agua necesitamos la seccion efectivamente libre.

Que sea F_1 la seccion efectivamente libre;

v la velocidad media del agua en su movimiento por el filtro, i μ el coeficiente que indica la permeabilidad del material, es decir, la proporcion entre la seccion efectivamnte libre F_1 i toda la seccion F del filtro, entónces deducimos de la fórmula (1).

$$H = \frac{Q}{F_1} \cdot \frac{e\ \mu}{k_0}$$

$\frac{Q}{F_1}$ es igual a la velocidad v, i si reducimos las dos constantes $\frac{\mu}{k_0}$ en una sola constante k, la última fórmula se trasforma en la espresion:

$$H = k\ v\ e \qquad (2)$$

De manera que segun esta lei la diferencia de los dos niveles del agua, es decir, la carga H que se necesita para que pueda pasar una cierta cantidad de agua con la velocidad media v por un filtro de la altura e es proporcional a la velocidad, a la altura del

(1) THIEM: *Die Ergiebigkeit artesischer Bohungen, Sckachtbrunnen und Fietergallerien. Journal für Gasbelenchtung und Wasserversorgung*, 1870, paj. 450.

filtro, es decir, la lonjitud recorrida por el agua, i proporcional a un coeficiente k que sólo depende de la naturaleza del material filtrante. Esta es la lei que ha sido principalmente aplicada al movimiento de las aguas subterráneas, suponiendo que las capas permeables no sean otra cosa que verdaderos filtros, i el injeniero aleman Thiem ha deducido de esta lei en una importante obra (1) una fórmula referente a la órbita de depresion del nivel de las aguas subterráneas en los pozos artificiales, i que sirve al mismo tiempo para calcular la abundancia de las captaciones de aguas subterráneas.

Una fórmula completamente idéntica con la de Darcy deduce Dupuit en su obra: *Traité theorique et pratique de la conduite et de la distribution des eaux*, Paris, 1854, pero por medio de las reflecciones siguientes:

Dupuit contempla la resistencia en el movimiento de las aguas subterráneas i supone que ellas se mueven en hilos separados, es decir, en canulículos de seccion constante.

Significa:

$\frac{h}{l}$ la pendiente necesaria para vencer la resistencia del movimiento del agua en la lonjitud l; F la seccion de uno de estos canulículos;

u la parte mojada de la circunferencia de la seccion;

v la velocidad media de uno de estos hilos de agua;

α i β dos coeficientes constantes; entónces se deduce segun las doctrinas de la hidráulica práctica, la fórmula:

$$\frac{h}{l} = \frac{u}{F} (\alpha v + \beta v^2)$$

En esta fórmula Dupuit no toma en cuenta la segunda potencia de la velocidad por tratarse de velocidades bastante pequeñas, pone para simplificar mas la última fórmula

$$\frac{u}{F} \alpha = \tau$$

y deduce así la espresion:

$$\frac{h}{l} = \tau v \qquad (3)$$

es decir, una lei, como ya lo hemos dicho, completamente idéntica con la de Darcy.

Los mismos resultados han sido tambien confirmados por Hagen en su obra: *Über die Bewegung des Wassers, etc.*, Berlin 1878.

Hagen esperimentó con canulículos capilares, en los cuales supone que haya un movimiento análogo al que se produce entre las masas de un material filtrante, i encontró la fórmula siguiente:

$$P = \frac{b}{D^2} c \qquad (4)$$

en la cual significa:

P la pendiente relativa;

D el diámetro del canulículo;

b una constante; i

c la velocidad media.

Hagen dedujo la ecuacion (4) de la fórmula conocida en la hidráulica:

$$P = r\,c + s\,c^2$$

en la cual r i s son dos constantes que dependen del diámetro de las cañerías.

El autor dice en su obra, pájina 29:

«Si se deja pasar agua de arriba a abajo por un filtro de arena, como sucede en los grandes filtros de agua potable, el fonómeno es el mismo como en canulículos capilares. En la fórmula que se refiere a la pendiente relativa P se anula la segunda parte i la carga es proporcional a la velocidad o al caudal escurrido.»

A la misma lei llegó Poisseuille en su obra: *Recherches experimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petites diamètres,»* Paris 1884.

Poisseuille hizo sus esperimentos tambien con canulículos capilares, i probó, por la conformidad de sus cálculos i de sus observaciones, la exactitud de la fórmula siguiente:

$$h = \rho \frac{l}{d^2} v \qquad (5)$$

en la cual significa:

h la carga;

ρ un coeficiente;

d el diámetro;

l la lonjitud del canulículo; i

v la velocidad media.

Ademas, mi estimado profesor en la Universidad Técnica Real de Stuttgart en Alemania, doctor Otto Lueger ha formado para el movimiento de las aguas subterráneas en los aluviones la siguiente lei:

$$u = k\,a \qquad (6)$$

en la cual indica:

u la velocidad;

a la pendiente en la unidad de lonjitud; i

k un coeficiente constante que depende de la naturaleza de los aluviones.

LUEGER investiga por medio de cálculos el movimiento de las aguas subterráneas por las partes huecas de los aluviones haciendo varias suposiciones que simplifican las operaciones. (*)

Dicho autor contempla el movimiento del agua por un recipiente lleno de bolitas del mismo diámetro i calcula la resistencia que tiene que vencer el agua al pasar por los poros que forman las bolitas.

Sea b el ancho, h la altura i l la lonjitud del recipiente lleno de bolitas del mismo

(*) LUEGER: *Theorie der Bewegung des Grundwassers in den Allurionen der Flupgebiete*, Stuttgart. 1883.

diámetro d, entónces el volúmen de las partes huecas entre las bolitas, juntándolas lo mas posible, es:

$$V = 0{,}27\ b\ h\ l,$$

i la superficie de todas las bolitas:

$$F = 4{,}44\ \frac{b\ h\ l}{d}$$

de lo cual nos podemos convencer haciendo un cálculo sencillo.

Si el nivel del agua tiene cierta pendiente a en la unidad de lonjitud, el agua, al pasar por los poros produce por unidad de lonjitud la fuerza:

$$a = 0{,}27\ F\ b\ h\ a$$

siendo F el peso específico del agua.

La fuerza equivalente consiste en el vencimiento de la resistencia producida por el frotamiento del agua con la superficie de las bolitas, si no tomamos en cuenta las fuerzas moleculares, cambios de temperatura, etc.

Que sea pues R' la fuerza en la unidad de superficie producida por el frotamiento del agua con la superficie de las bolitas, i p la superficie mojada en unidad de lonjitud, entónces la fuerza de frotamiento en unidad de lonjitud es $p\ R.'$

Tenemos pues la relacion siguiente:

$$p\ R' = 0{,}27\ F\ b\ h\ a.$$

En la espresion jeneral aplicada en la hidráulica para la resistencia de frotamiento:

$$\frac{R'}{F} = a\ u + b\ u^2$$

donde u representa la velocidad, a i b dos constantes, LUEGER tambien no toma en cuenta la segunda potencia de la velocidad en comparacion a la primera, por tratarse de velocidades mui pequeñas, de manera que la última fórmula en este caso se trasforma en:

$$R = F\ c\ u$$

donde c siguifica una nueva constante.

Resulta pues:

$$p\ R' = p\ F\ c\ u = 0{,}27\ F\ b\ h\ a.$$

La superficie mojada en unidad de lonjitud es:

$$p = 4{,}44\ \frac{b\ h}{a\ d}.$$

De estas dos últimas ecuaciones deducimos:

$$u = \frac{0{,}27\ F\,b\,h\,d}{4{,}44\ F\,b\,h\,c}\,a = c'\,d\,a$$

Pero como el material entre cuyos poros realmente escurren las aguas subterráneas no está formado tan regularmente como el supuesto, LUEGER reemplaza las dos constantes $c'\ d$ por un solo coeficiente k que tiene que ser diferente para cada material, de manera que la última fórmula se deduce en la espresion ya citada bajo (6.)

$$u = k\,a$$

es decir, una fórmula que indica exactamente la misma lei de Dupuit i Darcy.

Todos los autores ya mencionados llegan pues al mismo resultado que, en el movimiento de las aguas subterráneas, la pendiente relativa a es proporcional a la velocidad v i proporcional a un coeficiente que sólo depende de la naturaleza de las capas permeables que recorren las aguas.

Uno de los primeros autores que puso en duda la exactitud de la lei de Dupuit i Darcy aplicada al movimiento de las aguas subterráneas fué el injeniero Smreker.

En su obra: *Das Grundwasser und seine Verwendung zu Wasserversorgungen, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1879*, páj. 347, dice Smreker lo siguiente:

«Los esperimentos de Darcy se estendian únicamente a filtros, las velocidades observadas en todos los esperimentos eran mui pequeñas i no variaban mucho; este hecho junto con la reflexion que el proceso en los filtros parece ser algo distinto al verdadero movimiento de las aguas subterráneas, ponen en duda la aplicacion de esta lei especial para filtros al movimiento de las aguas subterráneas. Dupuit supone la velocidad de las aguas subterráneas tan pequeña que se permite no tomar en cuenta la segunda potencia de ella; para el propio movimiento de las aguas subterráneas, dice Smreker, esto será exacto, pero si se contempla un pozo artificial, se verá que sacando continuamente grandes cantidades de agua, la velocidad del agua al entrar en el pozo puede ser mui grande. La demas suposicion de Dupuit que las aguas subterráneas escurren en canalículos de seccion constante no parece admisible, porque tales canales, con mas razon, deberian ser considerados como séries irregulares de partes huecas seguidas, cuyas secciones ya se ensanchan instantáneamente, ya disminuyen con la misma rapidez.»

Dicha obra forma la introduccion de una memoria (*) en la cual Smreker propone para el movimiento de las aguas subterráneas la siguiente fórmula:

$$h = \xi\,\frac{v^2}{2\,g}\,l \qquad (7)$$

en la cual significa:

h la carga;

v la velocidad media;

(*) SMREKER *Entwicklung eines Gesetzes für den Widerstand bei der Bewegung des Grundwassers. Zeitschrif des Vereins deutscher Ingenieure*, Berlin 1876.

l la lonjitud recorrida por el agua;

g la constante de gravitacion; i

ξ un coeficiente que está relacionado con la velocidad v de la manera siguiente:

$$\xi = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{v}} \tag{8}$$

donde α i β son dos constantes.

Respecto del coeficiente ξ, Smreker agrega que, en todos los casos donde las velocidades son pequeñas, es permitido no tomar en cuenta el coeficiente α i espresar ξ por la ecuacion:

$$\xi = \frac{\beta}{\sqrt{v}} \tag{8ª}$$

Reduciendo las dos fórmulas (7) i (8ª) en una sola obtenemos:

$$\frac{h}{l} = \frac{\xi}{2g} \cdot \frac{v^2}{\sqrt{v}}$$

$\frac{h}{l}$ corresponde a la pendiente relativa que llamaremos a, i si reducimos $\frac{\xi}{2g}$ en un solo coeficiente k, la última fórmula se trasforma en la espresion:

$$a = k\, v^{\frac{3}{2}} \tag{9}$$

Es decir que, segun Smreker, la pendiente a es proporcional a la velocidad v elevada a la $\frac{3}{2}$ potencia i proporcional a un coeficiente k que sólo depende de la naturaleza del material que forma la capa permeable.

Últimamente se han hecho ensayos respecto al movimiento del agua por materiales filtrantes, de los cuales resulta que la pendiente a no es proporcional a la primera potencia de la velocidad, como lo indica la lei de Dupuit i Darcy, ni tampoco proporcional a la velocidad elevada a la $\frac{3}{2}$ potencia, como lo indica la lei de Smreker.

El injeniero norte americano Hazen (*) ha hecho ensayos con arena de granos de diferentes dimensiones i ha obtenido los resultados que indicamos en la tabla siguiente:

---

(4) HAZEN. *The filtration of public water suplies.* New-York 1895.

TABLA NÚM 1

ENSAYOS DE HAZEN

	Dimensiones medias de los gramos (en m/m)									
	3	5	8	10	15	20	25	30	35	40
Clase de arena en la figura 1	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Pendiente a	Velocidad v en metros por dia									
0,0005	3,5	10	20	30	50	80	110	150	200	250
0,001	7	21	41	58	100	148	205	275	370	450
0,002	14	40	78	110	190	275	370	480	590	710
0,004	27	77	150	208	350	480	610	740	870	1000
0,006	41	112	207	275	450	620	780	930	1090	1240
0,008	54	142	252	340	530	720	900	1090	1270	1450
0,01	67	173	300	385	610	830	1030	1220	1410	
0,015	98	238	378	480	760	1030	1260	1480		
0,02	127	300	467	580	890	1180	1470			
0,03	185	400	615	750	1110	1450				
0,05	280	560	885	1060	1490					
0,1	495	930	1310	1550						

Fuera de dicho autor, el profesor doctor Ph. Forchheimer (*) en Graz ha hecho ensayos con casquijo del llano de Lech cerca de *Gersthofen* en Baviera colocando el material entre dos redes de alambre, dejando pasar el agua por el casquijo i midiendo la cantidad de agua escurrida i la pendiente del nivel.

Las observaciones hechas por Forchheimer son las siguientes:

(*) FORCHHEIMER: *Wasserbevegung durch Boden. Zeitschrift des Vereins deutscher ingenieure*, Berlin 1901, núm. 49 i 50.

TABLA NÚM. 2

ENSAYO DE FORCHHEIMER CON CASQUIJO

Velocidad v en m. por dia	10,7	27,5	52,6	64,7	67,3	90,2	100,3
Pendiente observada a...	0,0100	0,030	0,070	0,107	0,110	0,170	0,190
$\frac{a=4,422}{104} v^{1,316}$	0,0100	0,0347	0,0814	0,107	0,112	0,116	0,190

Para representar con mas claridad la relacion entre pendiente i velocidad que resulta de los ensayos de *Hazen* i *Forchheimer* publicamos las figuras número 1 i número 2.

Es de advertir que las velocidades por dia indicadas en las tablas números 1 i 2 i en las figuras 1 i 2 no se refieren a la seccion efectivamente libre, sino a toda la seccion del filtro, de manera que estas velocidades son mui inferiores a las verdaderas velocidades del agua al pasar el material filtrante.

En vista de estos i varios otros ensayos, Forchheimer propone para el movimiento de las aguas subterráneas dos fórmulas:

Primero la fórmula de la parábola

$$a = a\,v + b\,v^2 \ldots . \quad (10)$$

i segundo la ecuacion potencial

$$a = R\,v^n \quad \ldots . \quad (11)$$

en las cuales a, b, k i n significan constantes.

Segun Forchheimer la fórmula (10) se acerca mas a la verdad que la fórmula (11), pero la primera es mas complicada, miéntras que la segunda ofrece la preferencia de simplificar mas las deducciones matemáticas, como por ejemplo, la fórmula de la órbita de depresion en los pozos artificiales.

Aplicando la fórmula (11) a los ensayos de Hazen obtenemos, si se exije conformidad en la mayor i menor pendiente observada, las siguientes ecuaciones:

Para el ensayo con granos de 3 m/m de diámetro

$$a = \frac{1,308}{104}\, v^{1,07} \qquad (12)$$

Para el ensayo con granos de 5 m/m de diámetro

$$a = \frac{3,38}{105}\, v^{1,17} \qquad (13)$$

Para el ensayo con granos de 40 m/m de diámetro

$$a = \frac{8{,}272}{108}\, v^{1{,}577} \qquad (14)$$

Citamos tambien la ecuacion

$$a = \frac{4{,}422}{104}\, v^{1{,}316} \qquad (15)$$

que se refiere a los ensayos de Forchheimer.

Los valores de a obtenidos con estas últimas ecuaciones están inscritos en las tablas números 2, 3, 4 i 5, i permiten una comparacion con los valores de a observados en los ensayos.

TABLA NÚM. 3

ENSAYO DE HAZEN CON GRANOS DE 3 M/M DE DIÁMETRO

Velocidad v en m por dia	Pendiente observada a	$a = \frac{1{,}308}{104}\, v^{1{,}07} =$
3,5	0,0005	0,0005
7	0,001	0,00105
14	0,002	0,00220
27	0,004	0,00448
41	0,006	0,00696
54	0,008	0,00933
67	0,01	0,0118
98	0,015	0,0177
127	0,02	0,0233
185	0,03	0,0349
280	0,05	0,0543
495	0,1	0,1

TABLA NÚM. 4

ENSAYO DE HAZEN CON GRANOS DE 5 M/M DE DIÁMETRO

Velocidad v en m. por dia	Pendiente observada a	$a = \frac{3{,}38}{10^5}\, v^{1{,}17} =$
10	0,0005	0,0005
21	0,001	0,00119
40	0,002	0,00253
77	0,004	0,00546
112	0,006	0,00843
142	0,008	0,0112
173	0,01	0,0140
238	0,015	0,0200
300	0,02	0,0267
400	0,03	0,0374
560	0,05	0,0554
930	0,1	0,1

TABLA NÚM. 5

ENSAYO DE HAZEN CON GRANOS DE 40 M M DE DIÁMETRO

Velocidad v en m. por dia.....	250	450	710	1000	1240	1450
Pendiente observada α	0,0005	0,001	0,002	0,004	0,006	0,008
$\alpha = \frac{8,272}{108} v^{1,577} =$	0,0005	0,00126	0,00259	0,00445	0,00625	0,008

La conformidad entre las pendientes observadas i las pendientes calculadas segun (12), (13), (14) i (15) es tan exacta que justifica sin duda la aplicacion de la fórmula (11) a la práctica.

Estos son mas o ménos los resultados de las investigaciones que se han hecho hasta hoi dia respecto de esta materia.

Pero hai que añadir que la última fórmula (11) está basada como casi todas las fórmulas citadas anteriormente, sobre ensayos que se han hecho en dimensiones limitadas i que los casos que jeneralmente se presentan en la práctica son mui distintos i tambien de superiores dimensiones a los ensayos que se practican en los laboratorios.

He aquí por qué nos parece de gran importancia comparar algunos datos obtenidos en la práctica, es decir, datos que se refieren a *verdaderas corrientes subterráneas*, con los resultados obtenidos aplicando la fórmula (11).

Con tal propósito, nos hemos servido de los siguientes datos que han sido tambien publicados en el *Journal für Gasbelenchtung und Wasserversorgung*, München 1876, por el injeniero Thiem.

DESCRIPCION DE LOS ENSAYOS DE THIEM.—Con el objeto de abastecer la ciudad de Estrasburgo en Alsacia con agua potable, aprovechando las aguas subterráneas en los aluviones del valle del Rhin, el injeniero A. Thiem habia hecho en el año 1875 vastos ensayos para poder fijar aproximadamente la abundancia de las corrientes subterráneas que se encuentran ahí.

Para conseguir todos los datos necesarios relacionados con estas corrientes subterráneas, se propuso investigar una superficie de mas o ménos 40 kilómetros cuadrados.

Para obtener el relieve de la superficie de las aguas subterráneas, se aprovecharon los pozos artificiales que existen en los pueblos cercanos, i ademas se ejecutaron 48 sondajes hasta la profundidad media de 4 metros bajo el suelo. Se niveló casi todos los dias durante algunos meses la superficie del agua en todos los pozos i sondajes, i con estos resultados se consiguió construir en un plano las curvas horizontales del nivel de la corriente subterránea. De estos datos resulta que las aguas subterráneas de ahí escurren casi exactamente en direccion de norte a sur.

Al mismo tiempo se hicieron escavaciones con el objeto de conocer las capas jeolójicas.

De todas estas investigaciones se pudo deducir la existencia de corrientes subterráneas que son independientes de las aguas del Rhin i que solamente están relacionadas con su nivel. En varias partes se pudo probar que las aguas subterráneas escurrian directamente al Rhin i ademas se constató por medio de análisis químicos que las aguas subterráneas eran completamente distintas en su composicion a las aguas del Rhin.

La temperatura a la profundidad de 12 metros bajo el suelo era casi constante de 11,8° Celcius.

Luego se propuso un punto a propósito paaa la captacion de las aguas.

Para conocer la abundancia de agua i al mismo tiempo las capas jeolójicas i el grado de permeabilidad de las últimas, se construyó un pozo artificial de 3 metros de diámetro.

El pozo alcanzó la profundidad de 7 metros bajo el suelo i traspasó primero una capa de humus del grueso de 0 35 metros seguida por una capa de arcilla del grueso de 1.70 m.

A los 2.40 metros bajo el suelo se notó el nivel del agua, i las capas siguientes hasta la profundidad de 7 metros bajo el suelo estaban formadas de casquijo mezclado con poco de arena.

Mas tarde se introdujo en el suelo del pozo un tubo de fierro perforado de 230 m/m de diámetro hasta la profundidad de 11 metros bajo el suelo.

Ademas, para poder observar la depresion del nivel durante los ensayos, se hicieron en el eje paralelo i en el eje perpendicular a la direccion de la corriente una cantidad de sondajes en los cuales se colocaron tubos de fierro perforado llamados tubos de Norton.

De los sondajes se dedujo que la capa permeable en la cual escurren las aguas tiene el grueso medio de 10 metros.

Los ensayos para conocer la abundancia de agua consistian: en la estraccion de ciertas cantidades de agua por medio de bombas centrífugas midiendo al mismo las cantidades estraidas, i en la observacion de la depresion del nivel del agua tanto en el pozoo como en los tubos de Norton.

De los 6 ensayos hechos son tres los que queremos aprovechar para nuestro propósito: el primero, el tercero *a* i el tercero *b*.

PRIMER ENSAYO. – El primer ensayo duró 6 dias i 6 noches. La depresion del nivel en el pozo era 1.50 metros i la cantidad de agua elevada por las bombas variaba dentro de 100 i 112 litros por segundo. El nivel jeneral de la corriente quedó durante este tiempo constante, salvo pequeñas variaciones de algunos centímetros.

De las órbitas de depresion observadas, la del eje en direccion al oeste era la que mostraba mas regularidad. Como este eje está perpendicular a la direccion de la corriente, el propio movimiento de las aguas no influye en las depresiones del nivel en este plano vertical.

Las depresiones observadas en el eje occidental están citadas en la tabla núm. 6 i ademas hemos construido la órbita de depresion en la figura 1 de la lámina I.

TERCER ENSAYO. *a).* – En este ensayo se estrajo del pozo la menor cantidad posible que permitian las maquinarias funcionando contínuamente. El ensayo duró 4 dias i 4

noches i la depresion del agua en el pozo era 0.43 metros. La cantidad media de agua que elevaban las bombas era 56 litros por segundo.

La órbita de depresion en el plano vertical del eje occidental está representada en la figura 2 de la lámina I i las depresiones observadas están anotadas en la tabla núm. 7.

TERCER ENSAYO. *b).* — Este ensayo siguió directamente al anterior i duró tambien 4 dias i 4 noches. Las bombas arrojaban 79 hasta 84 litros por segundo i la depresion en el pozo era 0.80 metros.

En la tabla núm. 8 hemos anotado las depresiones observadas i la figura 3 de la lámina I representa la órbita de depresion en el plano vertical del eje occidental.

TABLA NÚM. 6

PRIMER ENSAYO DE THIEM EN ESTRASBURGO (eje occidental)

N.º del tubo de Norton...	Circunferencia del pozo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
													m.
Distancia x del eje vertical del pozo.....	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	8,5	11,5	14,5	24,5	34,5	44,5	64,5	84,5
Depresion δ.....	1,50	1,41	1,05	0,98	0,83	0,66	0,53	0,46	0,33	0,29	0,24	0,19	—
Distancia y del nivel deprimido de la capa impermeable.....	8,50	8,59	8,95	9,02	9,17	9,34	9,47	9,54	9,67	9,71	9,76	9,81	—

TABLA NÚM. 7

TERCER ENSAYO *a)* DE THIEM EN ESTRASBURGO (eje occidental)

N.º del tubo de Norton..	Circunferencia del pozo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
													m.
Distancia x del eje vertical del pozo.....	1.5	2.5	3,5	4,5	5,5	8,5	11,5	14,5	24,5	34,5	44,5	64,5	84,5
Depresion δ.....	0.43	0,44	0,35	0,33	0,31	0,23	0,19	0,16	0,13	0,09	0,08	0,06	0,05
Distancia y del nivel deprimido de la capa impermeable.....	9.57	9,56	9,65	9,67	9,69	9,77	9,81	9,84	9,87	9,91	9,92	9,94	9,95

TABLA NÚM. 8

TERCER ENSAYO *b)* DE THIEM EN ESTRASBURGO (eje occidental)

N.° del tubo de Norton..	Circunferencia del pozo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
													m.
Distancia y del eje vertical del pozo	1.5	2,5	3,5	4,5	5,5	8,5	11,5	14,5	24,5	34,5	44,5	64,5	84,5
Depresion δ.....	0.80	0,81	0,62	0,60	0,57	0,42	0,35	0,31	0,24	0,20	0,17	0,15	0,12
Distancia y del nivel deprimido de la capa impermeable.....	9.20	9,19	9,38	9,40	9,43	9,58	9,65	9,69	9,76	9,80	9,83	9,85	9,88

No hemos hecho uso de las órbitas de depresion observadas en los planos verticales del eje norte i sur, es decir, en direccion de la corriente, porque aquí las órbitas se forman tambien bajo la influencia de la propia velocidad de la corriente subterránea.

En cuanto a las órbitas en el plano vertical del eje oriental, ellas mostraban en todos los ensayos grandes irregularidades debidas probablemente a una irregularidad en la formacion de las capas jeolójicas.

Queda que mencionar que las cantidades arrojadas durante la construccion del pozo subian hasta 117 litros por segundo, de manera que la velocidad del agua al entrar en el pozo era tan subida que el agua arrastraba consigo grandes cantidades de casquijo i que por esta causa tuvo lugar una dislocacion de las masas casquijas. Las observaciones en los tubos de Norton cerca del pozo no merecen pues mucha confianza.

Para mostrar ahora de qué manera estos ensayos nos han servido para probar una vez mas la exactitud de la fórmula (11) referente al movimiento de las aguas subterráneas, es preciso hacer las siguientes observaciones:

La figura número 3 representa un corte vertical trazado por el centro de un pozo artificial construido en una corriente subterránea, cuya propia velocidad sea mui pequeña:

Que sea:

$A'B'$ la línea del suelo;

$A\ B$ el nivel del agua;

$C\ D$ la línea correspondiente a la superficie de la capa impermeable, la cual suponemos horizontal;

H el grueso de la capa permeable, cuyo material sea homojéneo;

S_0 la depresion del agua en el pozo;

Q la cantidad de agua estraida del pozo en la unidad de tiempo correspondiente a la depresion S_o;

$P\ m+1$ i $P\ m-1$ dos puntos de la órbita de depresion a las distancias respectivas $X\ m+1$ i $X\ m-1$ del eje del pozo;

$Y\ m+1$ i $Y\ m-1$ las ordenadas de los puntos $P\ m+1$ i $P\ m-1$, es decir, las distancias del nivel deprimido en estos puntos de la superficie de la capa impermeable;

$S\ m+1$ i $S\ m-1$ las depresiones del nivel en los puntos $P\ m+1$ i $P\ m-1$ correspondientes a la cantidad Q arrojada continuamente del pozo.

Cortemos ahora la superficie deprimida por dos cilindros circulares, cuyos ejes corresponden con el eje vertical del pozo, i cuyos radios son respectivamente $X\ m+1$ i $X\ m-1$.

Que signifique ademas:

$F\ m+1$ i $F\ m-1$ las superficies mojadas i $F'\ m+1$ i $F'\ m-1$ las secciones de escurrimiento efectivamente libres en los dos cilindros;

μ el coeficiente de permeabilidad, es decir, la proporcion entre la seccion de escurrimiento efectivamente libre i toda la seccion mojada, entónces existen las siguientes relaciones:

$$F\ m+1 = 2\ \pi\ X\ m+1\ Y\ m+1$$
$$F'\ m+1 = \mu\ F\ m+1 = 2\ \pi\ \mu\ X\ m+1\ Y\ m+1$$
$$F\ m-1 = 2\ \pi\ X\ m-1\ Y\ m-1$$
$$F'\ m-1 = \mu\ F\ m-1 = 2\ \pi\ \mu\ X\ m-1\ Y\ m-1$$

La superficie media $F\ m$ entre $F\ m+1$ i $F\ m-1$ es pues:

$$F\ m = \frac{F\ m+1 + F\ m-1}{2} = \pi\ (X\ m+1\ Y\ m+1 + X\ m-1\ Y\ m-1)$$

i la superficie media efectivamente libre entre $F'm+1$ i $F'm-1$:

$$F'\ m = \mu\ F\ m = \pi\ \mu\ (X\ m+1\ Y\ m+1 + X\ m-1\ Y\ m-1) \qquad (16)$$

Sean $V\ m+1$, $V\ m-1$ i $V\ m$ las velocidades medias con que pasan las aguas por las secciones $F'\ m+1$, $F'\ m-1$ i $F\ m$ respectivamente, entónces deducimos:

$$V\ m+1 = \frac{Q}{F'\ m+1} = \frac{Q}{\mu\ F\ m+1} = \frac{Q}{2\ \pi\ \mu\ X\ m+1\ Y\ m+1}$$

$$V\ m-1 = \frac{Q}{F'\ m-1} = \frac{Q}{\mu\ F\ m-1} = \frac{Q}{2\ \pi\ \mu\ X\ m-1\ Y\ m-1}$$

$$\text{i}\quad V\ m = \frac{Q}{F'\ m} = \frac{Q}{\mu\ F\ m} = \frac{Q}{\pi\ \mu\ (X\ m+1\ Y\ m+1 + X\ m-1\ Y\ m-1)} \qquad (17)$$

La diferencia vertical $h\ m$ entre los dos puntos $P\ m+1$ i $P\ m-1$ representa la

pérdida de carga ocasionada por el movimiento del agua del punto $P\ m+1$ al punto $P\ m-1$; es decir al pasar por el anillo del grueso $l\ m$.

De la figura 3 deducimos:

$$h\ m=\delta\ m-1 - \delta\ m+1 = Y\ m+1 - Y\ m-1 \qquad (18)$$

$$l\ m=X\ m+1 - X\ m-1 \qquad (19)$$

de manera que la pendiente relativa $a\ m$ entre los dos puntos $P\ m+1$ i $P\ m-1$ es

$$a\ m=\frac{h\ m}{l\ m}=\frac{Y\ m+1 - Y\ m-1}{X\ m+1 - X\ m-1}=\frac{\delta\ m-1 - \delta\ m+1}{X\ m+1 - X\ m-1} \qquad (20)$$

Hai que notar que con el movimiento del agua del punto $P\ m+1$ al punto $P\ m-1$ la seccion de escurrimiento ha ido disminuyendo poco a poco, por cuya causa la velocidad $V\ m+1$ ha ido aumentando hasta el valor de $V\ m-1$, una parte de la carga $h\ m$ ha servido pues para el aumento de esta velocidad, pero esta parte es tan sumamente pequeña que la consideramos nula.

Si mas nos acercamos al centro del pozo, mas aumentan las velocidades $V\ m$ i con ellas tambien las pendientes relativas $a\ m$; de manera que si calculamos las velocidades i pendientes para los diferentes intervalos en las órbitas de depresion observadas en los ensayos del injeniero Thiem, podemos constatar la verdadera relacion que existe entre pendiente i velocidad.

En la fórmula (17) para la velocidad.

$$V\ m=\frac{Q}{\pi\mu\,(X\ m+1\ Y\ m+1+Xm-1\ Y\ m-1)}$$

todos los factores son conocidos, salvo el coeficiente de permeabilidad μ.

Pero como μ es un coeficiente constante, para la relacion entre velocidad i pendiente no importa si calculamos con $V\ m$ o con $\mu\ V\ m$.

De la última fórmula deducimos pues:

$$\mu\ V\ m=\frac{Q}{\pi\,(X\ m+1\ Y\ m+1+X\ m-1\ Y\ m-1)} \qquad (21)$$

Para los diferentes intervalos en las órbitas de depresion observadas en los ensayos de Thiem hemos calculado los valores de $\mu\ V\ m$ i las pendientes

$$am=\frac{hm}{lm}$$

que están anotados en las tablas núms. 9, 10 i 11.

Ademas hemos representado gráficamente la relacion entre velocidad i pendiente en las figuras 4, 5 i 6 de la lámina I.

TABLA NÚM. 9

PRIMER ENSAYO

Intervalo	hm	lm	$am = \frac{hm}{lm}$	$(Xm+1\ Ym+1) + (Xm-1\ Ym-1)$	Q en litros por segundo	Q en metros cúbicos por dia	$\mu\ vm = \frac{Q}{\pi(Xm+1\ Ym+1+Xm-1\ Ym-1)}$
	m.	m.		m.			
11 – 10	0,05	20	0,0025	1067,065	105	9072	2,706 m. por dia
10 – 8	0,09	20	0,0045	671,235			4,302 » »
8 – 7	0,13	10	0,0130	375,245			7,695 » »
7 – 6	0,07	3	0,0233	247,325			11,676 » »
6 – 4	0,30	6	0,0500	159,330			18,124 » »
4 – 2	0,22	2	0,1100	81,750			35,323 » »

TABLA NÚM. 10

TERCER ENSAYO *a)*

Intervalo	hm	lm	$am = \frac{hm}{lm}$	$(Xm+1\ Ym+1) + (Xm-1\ Ym-1)$	Q en litros por segundo	Q en metros cúbicos por dia	$\mu\ vm = \frac{Q}{\pi(Xm+1\ Ym+1+Xm-1\ Ym-1)}$
	m.	m.		m.			
11 – 10	0,02	20	0,001	1082,57	56	4838,4	1,422 m. por dia
10 – 8	0,05	20	0.0025	683,26			2,254 » »
8 – 6	0,06	13	0,00461	354,64			4,343 » »
6 – 5	0,04	3	0,01333	195,87			7,863 » »
5 – 4	0,08	3	0.02666	136,35			11,295 » »

TABLA NÚM. 11

TERCER ENSAYO *b)*

Intervalo	hm	lm	$am = \frac{hm}{lm}$	$(X_{m+1}\,Y_{m+1}) + (X_{m-1}\,Y_{m-1})$	Q en litros por segundo	Q en metros cúbicos por dia	$\mu\, vm = \frac{Q}{\pi(Xm+1\,Ym+1+Xm-1\,Ym-1)}$
	m.	m.		m.			
10 – 9	0,03	10	0,00300	775,53	82	7284,8	2,909 m. por dia
9 – 8	0,04	10	0,00400	577,220			3,907 » »
8 – 7	0,07	10	0,00700	379,62			5,940 » »
7 – 6	0,04	3	0.01333	251,48			8,967 » »
6 – 5	0,07	3	0,02333	192,40			11,720 » »

Nos resta ahora calcular las pendientes segun la fórmula (11), para compararlas con las pendientes observadas en los ensayos.

De la fórmula (11) deducimos:

$$a\, m = k\, v_m^n \tag{22}$$

Pero como no hemos podido calcular las verdaderas velocidades $v\, m$, sino que los valores de $\mu\, v\, m$, por no conocer el coeficiente μ, es necesario trasformar la última ecuacion. De ella deducimos multiplicando al mismo tiempo los dos lados con el factor 10^4 para no teuer que calcular con pendientes tan pequeñas:

$$10^4\, a\, m = \frac{k\, 10^4}{\mu_n} (\mu\, v\, m)$$

i reduciendo los factores $\frac{k\, 10^4}{\mu^n}$ en una sola constante k_o resulta:

$$10^4\, a\, m = k_o\, (\mu\, v\, m)^n \tag{23}$$

Para calcular el coeficiente k_o i la potencia n es necesario formar el logaritmo de la última ecuacion:

$$\log (10^4\, a\, m) = \log k_o + n \log (\mu\, v\, m) \tag{24}$$

Segun el método de los cuadrados infinitesimales, teniendo el número de a observaciones correspondientes de $a\,m$ i $(\mu\ v\ m)$ los valores mas probables de k_o i n resultan de las siguientes ecuaciones:

$$(25)\quad n=\frac{a\,\Sigma\left(\log(\mu\ v\ m)\log(10^4\ a\,m)\right)-\Sigma\left(\log(\mu\ v\ m)\right)\Sigma\left(\log(10^4\ a\,m)\right)}{a\,\Sigma\left[\left(\log(\mu\ v\ m)\right)^2\right]-\left[\Sigma\left(\log(\mu\ v\ m)\right)\right]^2}$$

$$(26)\ \text{Log}\ k_o=\frac{\Sigma\left(\log(10^4 a)\right)\Sigma\left[\left(\log(\mu\ v\ m)\right)^2\right]-\Sigma\left(\log(\mu\ v\ m)\right)\left[\Sigma\left(\log(\mu\ v\ m)\log(10^4\ a\ m)\right)\right]}{a\,\Sigma\left[\left(\log(\mu\ v\ m)\right)^2\right]-\left[\Sigma\left(\log(\mu\ v\ m)\right)\right]^2}$$

Los valores de los coeficientes k_o i de las potencias n para los tres ensayos de *Thiem* han sido calculados segun las dos últimas fórmulas en las tablas números 12, 13 i 14.

Nos queda que advertir que hemos calculado con los valores de $(\mu\ v\ m)$ correspondiente a metros por dia, para no tener que calcular con logaritmos negativos.

TABLA NÚM. 12

PRIMER ENSAYO

Intervalo	$10^4 a\,m$	$\mu\ v\ m$	$\text{Log}\,(\mu\ v\ m)$	$\text{Log}(10^4\ a\,m)$	$\text{Log}\,(\mu\ v\ m)\left(\log(10^4\ a\ m)\right)$	$[\text{Log}\,(\mu\ v\ m)]^2$	$10^4\ a'\,m$	$a'\,m$	$a\,m$
11—10	25	2,706	0,43236	1,39794	0,60443	0,18694	25,00	0,0025	0,0025
10—8	45	4,302	0,63367	1,65321	1,04756	0,40153	50,52	0,00505	0,0045
8—7	130	7,695	0,88624	2,11394	1,87343	0,78542	122,16	0,01221	0,0130
7—6	233	11,676	1,06729	2,36736	2,52661	1,13916	229,7	0,0229	0,0233
6—4	500	18,124	1,25825	2,69897	3,39600	1,58321	448,2	0,0448	0,0500
4—2	1100	35,323	1,54806	3,04139	4,70800	2,39640	1233,9	0,1233	0,1100
Σ			5,82587	13,27281	14,15603	6,49266			

Con los datos indicados en la tabla número 12 obtenemos pues para el primer ensayo:

$$(n)_{\text{I}} = \frac{6 \times 14{,}15603 - 5{,}82587 \times 13{,}27281}{6 \times 6{,}49266 - 5{,}82587^2} = 1{,}5177$$

$$\log (k_o)_{\text{I}} = \frac{13{,}27281 \times 6{,}49266 - 5{,}82587 \times 14{,}15603}{6 \times 6{,}49266 - 5{,}82587^2} = 0.74178$$

$$(k_o)_{\text{I}} = 5{,}518$$

TABLA NÚM. 13

TERCER ENSAYO *a)*

Intervalo	$10^4\ a\ m$	$\mu\ v\ m$	Log $(\mu\ v\ m)$	Log $(10^4\ a\ m)$	Log $(\mu\ v\ m)$ $\left(\log (10^4\ a\ m)\right)$	$[\text{Log } (\mu\ v\ m)]^2$	$10^4\ a'\ m$	$a'\ m$	$a\ m$
11 – 10	10	1,422	0,15309	1,00000	0,15309	0,02344	10,44	0,00104	0,0010
10 – 8	25	2,252	0,35296	1,39794	0,49341	0,12457	20,90	0,00209	0,0025
8 – 6	46,1	4,343	0,63776	1,66417	1,06135	0,40675	56,49	0,00565	0,00461
6 – 5	13,33	7,863	0,89559	2,12483	1,90300	0,80210	138,90	0,01389	0,01333
5 – 4	26,66	11,295	1,05289	2,42586	2,55423	1,10866	240,65	0,02406	0,0266
Σ			3,09229	8,61280	6,16508	2,46552			

Para calcular el coeficiente k_o i la potencia n correspondiente a este ensayo tenemos las ecuaciones:

$$(n)_{\text{III}^a} = \frac{5 \times 6{,}16508 - 3{,}09229 \times 8{,}61280}{5 \times 2{,}46552 - 3{,}09229^2} = 1{,}516$$

$$\text{Log } (k_o)_{\text{III}^a} = \frac{8{,}61280 \times 2{,}46552 - 3{,}09229 \times 6{,}16508}{5 \times 2{,}42552 - 3{,}09229^2} = 0{,}78510$$

$$(k_o)_{\text{III}^a} = 6{,}097$$

TABLA NÚM. 14

TERCER ENSAYO *b)*

Intervalo	$10^4\ a\ m$	$\mu\ v\ m$	Log $(\mu\ v\ m)$	Log. $(10^4\ a\ m)$	Log $(\mu\ v\ m)$ $\left(\text{Log. } (10^4\ a\ m)\right)$	$[\text{Log } (\mu\ v\ m)]^2$	$10^4\ a'\ m$	$a'\ m$	$a\ m$
10 – 9	30,00	2,909	0,46357	1,47712	0,66914	0,21489	28,97	0,002897	0,00300
9 – 8	40,00	3,907	0,59183	1,60206	0.95252	0,35025	44,14	0,004414	0,00400
8 – 7	70,00	5,940	0,77381	1,84510	1,42777	0,59880	80,23	0,008023	0,00700
7 – 6	133,33	8,967	0,95267	2,12494	2,02441	0,90762	144,0	0,0144	0,01333
6 – 5	233,33	11,720	1,06895	2,36797	2,53123	1,14266	211,5	0,02115	0,02333
Σ....			3,85083	9,41719	7,60507	3,21422			

Con estos datos deducimos:

$$n = \frac{5 \times 7{,}60507 - 3{,}85083 \times 9{,}41719}{5 \times 3{,}21422 - 3{,}85083^2} = 1{,}4251$$

$$\text{Log } k_o = \frac{9{,}41719 \times 3{,}21422 - 3{,}85083 \times 7{,}60507}{5 \times 3{,}21422 - 3{,}85083^2} = 0{,}8008$$

$$k_o = 6{,}3212$$

Para el cálculo de las pendientes, segun la fórmula (11), las cuales llamaremos $a'\ m$, tenemos pues las siguientes ecuaciones

$$(10^4\ a'\ m)_{\text{I}} = 5{,}518\ (\mu\ v\ m)^{1{,}5177} \quad (27)$$

$$(10^4\ a'\ m)_{\text{III a}} = 6{,}097\ (\mu\ v\ m)^{1{,}516} \quad (28)$$

$$(10^4\ a'\ m)_{\text{III b}} = 6{,}3212\ (\mu\ v\ m)^{1{,}4261} \quad (29)$$

Las pendientes $a'\ m$ calculadas segun estas últimas ecuaciones están anotadas en las tablas números 12, 13 i 14; i en las figuras 4, 5 i 6 de la lámina 1 hemos trazado las órbitas de las pendientes $a'\ m$ en funciones de los valores de $\mu\ v\ m$.

(Continuará)

ESTUDIO SOBRE LAS LEYES DEL MOVIMIENTO DE LAS AGUAS SUBTERRÁNEAS, por Antonio 2: Moder.

Fig. 1. Ensayos de Hazen

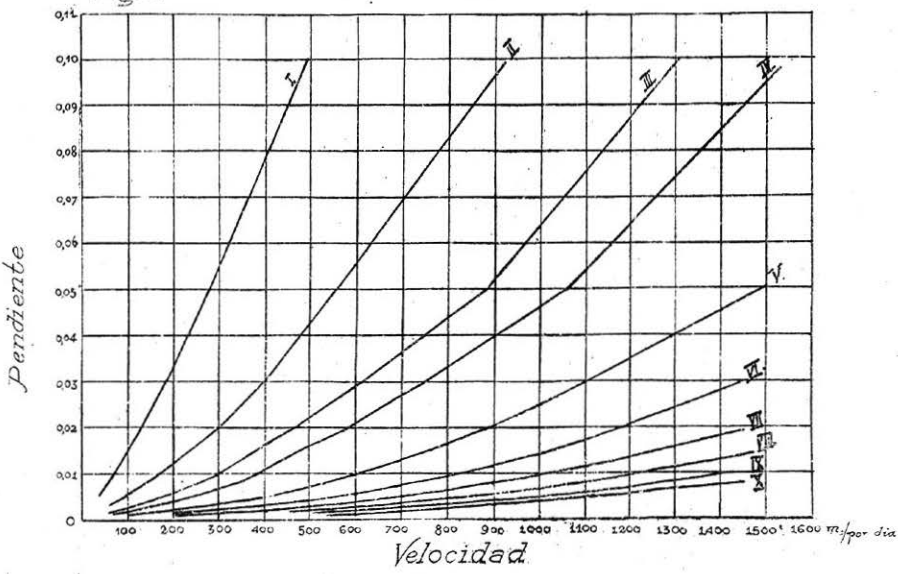


Fig. 2. Ensayo de Forchheimer

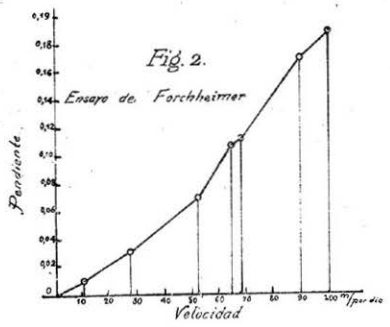
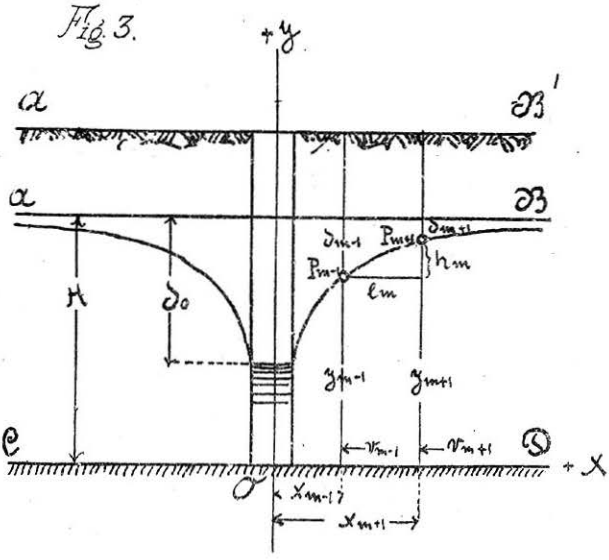


Fig. 3.



DE LA PARÁBOLA.

A. Tafelmacher.

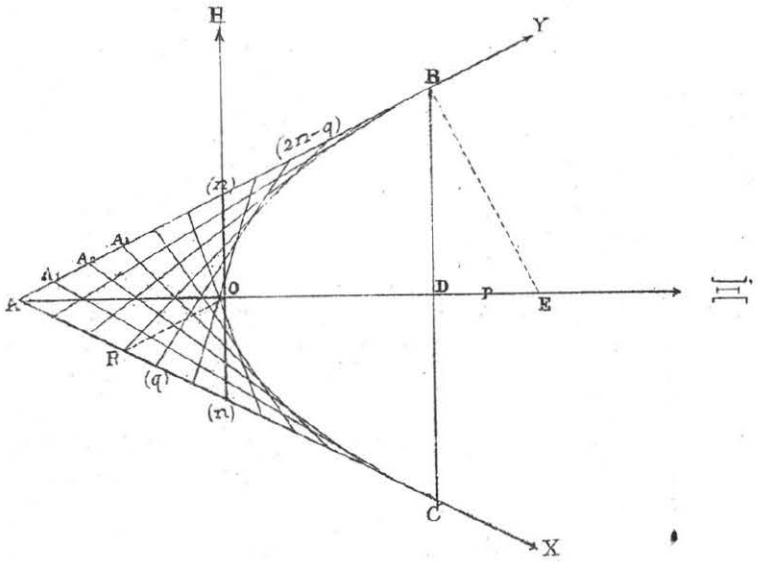
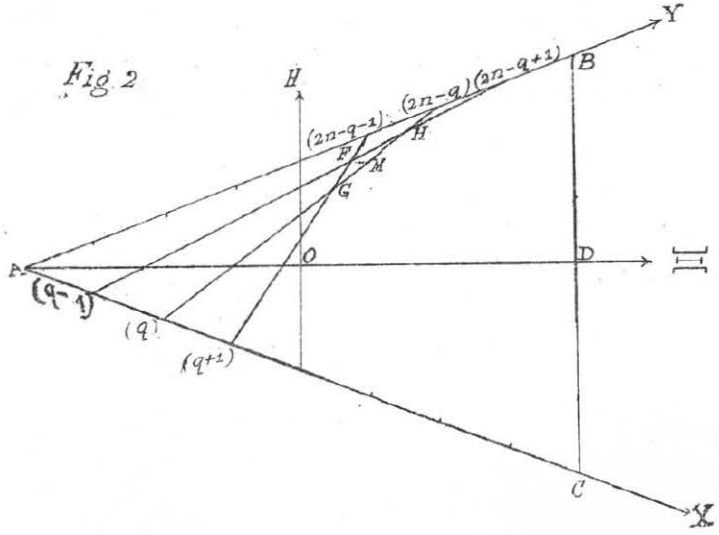


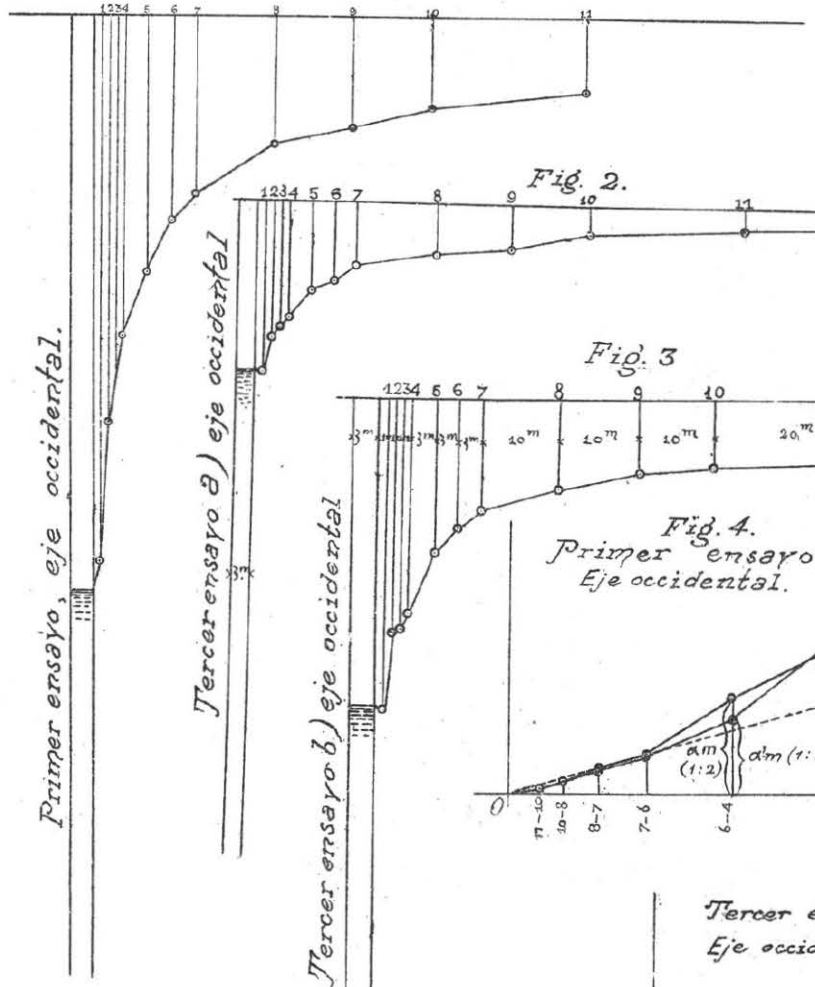
Fig 2



ANALES DEL INSTITUTO DE INGENIEROS DE CHILE.

ESTUDIO SOBRE LAS LEYES DEL MOVIMIENTO DE LAS AGUAS subterráneas, por Antonio 2º Moder.

Fig. 1.



ESCALA

De las horizontales: 1:1000

De las verticales: 1:20.

Fig. 2.

Fig. 3

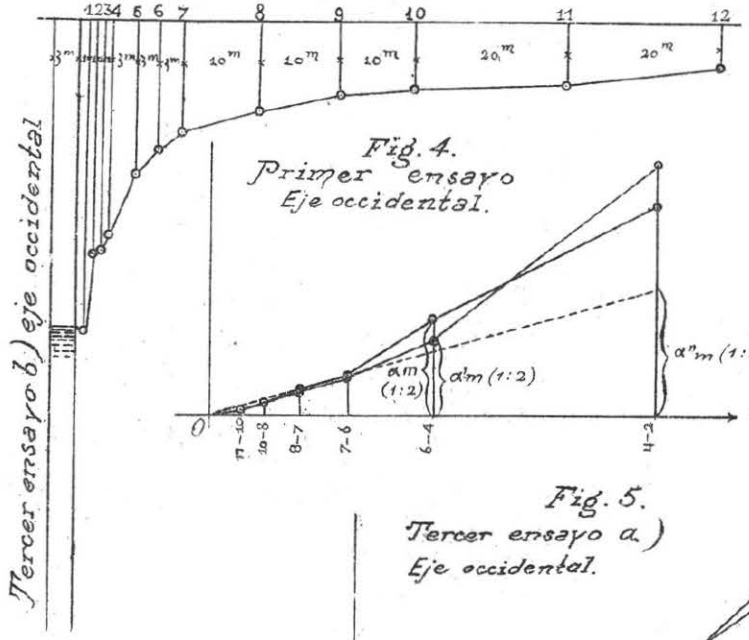


Fig. 4.
Primer ensayo
Eje occidental.

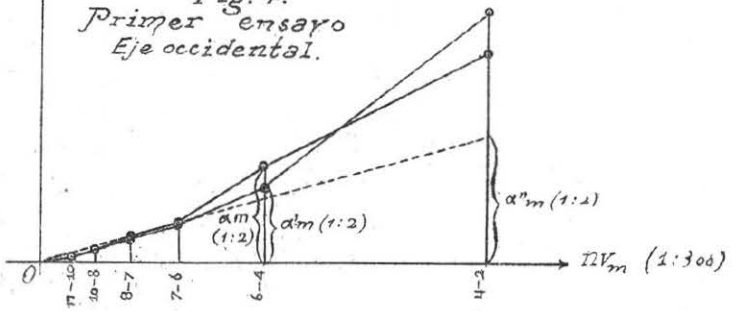


Fig. 5.
Tercer ensayo a.)
Eje occidental.

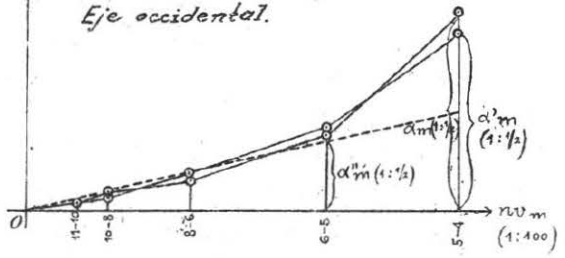


Fig. 6.
Tercer ensayo b)
Eje occidental.