

CÁLCULO DE LAS COORDENADAS GEOGRÁFICAS DE LOS VÉRTICES DE UNA TRIANGULACION.

INTRODUCCION.

El levantamiento del plano topográfico de un país necesita apoyarse sobre una red de grandes triángulos que cubrirá con sus mallas todo el terreno por levantar; el desarrollo máximo que puede dársele a esta red, tomando en cuenta las condiciones del terreno, es lo que se denomina *red primordial o de primer orden*, i será formada por triángulos bastante grandes, cuya forma se acerque en lo posible a la del triángulo equilátero. Esta red, a causa del tamaño de los lados, no será directamente utilizable para el levantamiento de detalles i será necesario formar nuevas redes secundarias i de orden inferior, procurando que los últimos lados que sirven directamente de apoyo a los trabajos topográficos no pasen de cinco kilómetros.

Los triángulos que ligan la red o redes de orden inferior a la triangulación primordial, se denominan de *segundo orden o secundarios* i tienen jeneralmente sólo el carácter de intermediarios; sin embargo, puede suceder que, a causa de circunstancias especialmente favorables a un gran desarrollo, la red de primer orden sea formada por triángulos muy grandes, cuyos lados alcancen a cien, doscientos i mas kilómetros i en este caso la triangulación que hemos llamado de segundo orden, tomará el carácter de intermediaria, no ya aisladamente, sino en conjunto de órdenes mas inferiores, que serán necesarios para unir los triángulos que sirven directamente de apoyo al trabajo topográfico a los de la triangulación primordial.

Se ha clasificado antiguamente el orden de las triangulaciones por la longitud de los lados, diciendo que la de primer orden es aquella en que dicha longitud pasa de 20 kilómetros; de segundo orden cuando de 20 a 8, i menor que 8 como inferiores (A. Germain—*Traité d'Hydrographie*, Paris 1882). Basta, sin embargo, un ligero exámen de los trabajos hechos hasta la fecha, especialmente en los últimos años, para dejar en claro la poca ventaja de esta clasificacion referida a las dimensiones. Si en un terreno plano i boscoso los lados de los triángulos de primer orden suelen bajar a 25 kilómetros i aun a 20, en las grandes triangulaciones, como por ejemplo la del paralelo 39.º Norte en Estados Unidos, con varios lados mayores de 200 kilómetros i aun uno con 294 kilómetros, los lados de los

triángulos de segundo orden tendrán una longitud mayor que la asignada en la clasificación.

Los jeodestas Schott i Faris, en su informe sobre triangulación presentado al Congreso Jeodésico de Washington de 1894 (*“Proceedings of the Geodetic Conference, held at Washington, Washington 1894. Report of Committee C., On Triangulation”*) se espresan respecto a la triangulación de primer orden, diciendo que es caracterizada por la mayor longitud practicable para los lados, dependiendo de la altura de las montañas i por la mayor exactitud en la mensura. La dimensión máxima de 294 kilómetros conocida hasta hoy se refiere a triángulos en que se ha hecho estacion en los tres vértices, pues Helmert indica que los ingleses han visado el Himalaya desde 300 kilómetros de distancia.

Para el cálculo de los triángulos excepcionalmente grandes en Estados Unidos, ha sido necesario introducir complicaciones tomando en cuenta la influencia de la altura sobre el mar i aun la curvatura de la vertical.

Como se comprende, el trabajo de la triangulación de primer orden i los cálculos relacionados a ella, dado que es la union de todos los elementos inferiores, será siempre una operacion delicada i que requiere el máximo de prolijidad en las determinaciones, tratando en todo caso de eliminar cuanta causa conocida de error pueda alterar los resultados o procurando compensar su influencia, sea que provenga de la mala forma de las figuras de la triangulación, de la poca fijeza de las imágenes de los puntos en el campo del anteojo, de las desviaciones de los rayos visuales por la atmósfera i el estado de ésta en el instante de la observacion o, por fin, del instrumento i observador.

Por muy grande que sea el cuidado que se gasta en una operacion de mensura, siempre i aun los observadores mas hábiles i prolijos, provistos de los mejores instrumentos, obtendrán diverjencias en un cierto número de medidas de la misma cantidad lineal o angular. El orden de la decimal en que comienzan a aparecer las diverjencias citadas nos permite formarnos una idea, ya sea de la bondad de los instrumentos o métodos usados, o bien de la mayor o menor habilidad del operador, pero siempre sólo podremos considerar los resultados obtenidos como una *aproximacion*, mas o ménos grande si se quiere, al verdadero valor; no existe, pues, en la práctica la precision absoluta como se la puede considerar en teoría.

En una mensura, de cualquier clase que sea, siempre que exista un cierto número de comprobaciones de los resultados que se obtengan, aparecerá una serie de contradicciones, cuya causa son los *errores inevitables* de observacion, haciendo uso de las distintas combinaciones de comprobacion. En la práctica si bien en trabajos de poca importancia es todavía tolerable la presencia de estas contradicciones siempre que ellas no sobrepasen un cierto límite, en todo trabajo de carácter científico deben desaparecer i en forma tal que, calculando un valor dado apoyándose en elementos distintos, se llegue siempre a resultados que se encuentren de acuerdo dentro de un límite establecido de antemano.

Aquí entra a desempeñar su importante papel la teoría de los errores que,

basada en ciertos principios suficientemente comprobados por la experiencia i que se aceptan como axiomas, nos permite encontrar en una serie de valores aquel que tiene mayor probabilidad de acercarse a la verdad, aunque, como ha dicho Hansen, la determinacion de una incógnita de una serie de observaciones es un problema situado en el límite de las Matemáticas i Metafísica. Por otro lado, es necesario fijar la precision de una observacion i hacer intervenir cada valor en las combinaciones acompañado de un número representativo de su bondad, dándole mayor o menor influencia en el resultado; de ahí la necesidad de establecer el *peso* de las observaciones. Ahora, para hacer desaparecer las diverjencias o contradicciones i que los valores resistan a todas las comprobaciones posibles dentro de un límite establecido, o sea ejecutar la *compensacion*, el desideratum será naturalmente obtener ese resultado con el mínimo de correcciones a los valores dados por la observacion, lo que se puede conseguir aproximadamente por apreciacion en trabajos pequeños i sólo con exactitud i en los grandes trabajos, bajo un principio científico, por el *método de los cuadrados mínimos* que va directamente a su fin: *encontrar las correcciones de modo que la suma de sus cuadrados sea mínima*.

Al ejecutar la compensacion de la red determinando los valores mas probables de los ángulos e introduciendo el peso de las observaciones, con lo que se consigue que los valores que inspiran mas confianza sufran menor alteracion, se espresan dichos pesos o números representativos del mérito de la observacion, en funcion de la *unidad de peso*, que hasta ahora se ha tomado de mui distinto modo en los diversos países que han ejecutado triangulaciones (Véase: Ferrero—*Rapport sur les triangulations*. Actas de la Asociacion Jeodésica Internacional). En la práctica las hipótesis de peso no son siempre enteramente exactas i como no todos los errores que se presentan son accidentales como los admite la teoría, siendo, ademas, limitado el número de las observaciones, se deduce que *una compensacion es sólo exacta dentro de las hipótesis de peso admitidas al ejecutarla*.

Las figuras jeométricas formadas en el terreno deben cumplir con ciertas condiciones de *cierre*; ademas los ángulos alrededor de un punto deben sumar treientos sesenta grados, una diagonal de un cuadrilátero calculada aisladamente por los triángulos laterales debe dar el mismo valor, etc., i de ahí, en fin, las *ecuaciones de condicion*, que podrán ser de *lados* o *ángulos*.

Los cálculos de compensacion de una red son mui laboriosos; bástenos decir que los de la parte occidental de la triangulacion del paralelo 52° Norte ocuparon a dos calculistas del Instituto Jeodésico durante ocho años, i Wright (*A Treatise on the Adjustment of Observations*—New York—1884) dice que el célebre calculista Dase ocupó desde el 1.º de junio hasta el 15 de setiembre para calcular una compensacion con 86 ecuaciones en las que habia 3141 términos.

Los triángulos esféricos podrian calcularse como tales, pero se presenta el inconveniente que, para obtener la exactitud jeodésica, no bastarian las tablas de logaritmos de uso corriente, siete decimales; de aquí la estensa aplicacion del importante teorema de Legendre, que permite calcular un triángulo esférico

pequeño como uno plano despues que se haya disminuido cada ángulo de un tercio del exceso esférico. Dicho teorema se puede aceptar hasta para los mas grandes triángulos medibles, puesto que en uno equilátero de 210 kilómetros de lado el error sólo alcanza a $\pm 0.001''$.

Un triángulo de una red corregida de esfericidad, es decir plano, i que ha servido para el cálculo de distancias, no siendo el verdadero triángulo del terreno, puesto que la suma de los ángulos alrededor de un punto de estacion será menor que treientos sesenta grados, los azimutes que se deduzcan estarán errados. En este estado no es posible utilizar la red para el cálculo de coordenadas jeográficas i azimutes, i será necesario volver los triángulos nuevamente esféricos agregando el exceso calculado primitivamente, el cual no habrá alterado despues de la compensacion, puesto que la superficie variará de una cantidad mui pequeña i el valor del exceso esférico en latitudes medias es sólo de $0.00507''$ por kilómetro cuadrado.

Con los ángulos de los triángulos esféricos se aplica la triangulacion al cálculo de coordenadas jeográficas i al traspaso de los azimutes, de modo que el resultado final de la compensacion de una red, es pues, los ángulos esféricos de los triángulos, de las direcciones en las estaciones i la distancia de los puntos de la triangulacion entre sí, medida a lo largo de la superficie curva terrestre en el horizonte medio del mar.

En los cálculos se emplean logaritmos de siete decimales, conservando a veces la octava de la interpolacion para evitar errores de la anterior.

Una triangulacion jeodésica puede ejecutarse bajo dos puntos de vista mui distintos en cuanto a la triangulacion de primer orden, ya sea para la mensura del pais o como contribucion al estudio de la forma i dimensiones de la tierra. En el modo de aplicacion i en el número de las observaciones astronómicas, puede decirse, habrá una diferencia si se trata del plano del pais o al mismo tiempo de un estudio de jeodesia superior.

El conocido jeodesta Sterneck en su trabajo sobre la triangulacion primaria austro-húngara, hace notar en pocas palabras la diferencia espuesta, como sigue: "En la aplicacion de la determinacion astronómica de coordenadas i azimutes medidos, está la verdadera diferencia entre los fines de la medida de la tierra i la del pais; a ambos debe servir de base la red trigonométrica.

"La mensura de la tierra necesita muchas determinaciones astronómicas de coordenadas i tomando como base la red compensada, estudia las variaciones de la vertical, separando las perturbaciones sistemáticas de las simplemente locales; las primeras dan indicaciones sobre la forma i curvatura de la superficie terrestre.

"La mensura del pais necesita la red compensada para la determinacion de distancias i posicion relativa de los puntos sobre la superficie. Puede sólo utilizar una de las determinaciones astronómicas con el objeto de orientar la red trigonométrica como un todo.

"La distancia real i verdadera posicion relativa de los puntos no se puede determinar astronómicamente; ellas se deducen sólo de la red compensada.

(Sterneck—*Das neue Dreiecksnetz I Ordnung der oesterreichisch-ungarischen Monarchie*—Wien 1899.)

Al hablar de la imposibilidad de medir distancias valiéndose de observaciones astronómicas, se refiere naturalmente el autor a la medida con una precision comparable a la jeodésica.

Aunque a veces, por razones económicas, se ha propuesto sólo la mensura del pais, creemos que ésta debe siempre ejecutarse en forma tal i con la precision suficiente, publicando ademas, los datos completos para su aprovechamiento posterior sin un gran aumento de labor; estimamos por otra parte que, aumentar el número de puntos en que se observa coordenadas i azimutes no es dispendioso en tal alto grado, para que pueda tomarse como una excusa a la obligacion que tienen los gobiernos de contribuir a la medida de sus fuerzas al progreso de la ciencia.

La ejecucion de un trabajo de carácter jeodésico impone la solucion de un cierto número de problemas exigiéndose para ello el conocimiento de algunos datos dependientes de la forma i dimensiones de la tierra; por otra parte, esas dimensiones i forma se deducen del trabajo mismo que nos proporciona los elementos para estudiar la curvatura de la superficie matemática de la tierra encontrando el cuerpo jeométrico que mejor se amolda al *jeoide* en una rejion dada, o sea determinando los elementos del *elipsoide de comparacion o referencia*, lo que se consigue por el estudio atento de las discrepancias entre las coordenadas jeográficas i azimutes observados i las que da el cálculo basado en la aceptacion previa de un tipo dado de elipsoide.

Por otro lado, los datos proporcionados por el levantamiento jeodésico de un pais i ejecutado con las precauciones i precision que se exige hoy día, permitiendo el cálculo de arcos de meridiano i paralelos, o tambien intermedios como en Estados Unidos, llevan un nuevo continjente al estudio de la forma i dimensiones del cuerpo que mas se aproxima al jeoide en toda la estension de la tierra o sea la determinacion de los elementos del *elipsoide jeneral*.

“La hipótesis simple de una forma esferoidal supone que la vertical está en coincidencia en todas partes con la normal al esferoide, o que la superficie del esferoide coincide con la del nivel del mar. Pero esto no es perfectamente correcto. La vertical no está en coincidencia jeneralmente con la normal i el nivel actual del mar o jeoide debe imaginarse como una superficie irregular situada parte encima, parte debajo, de la superficie esferoidal ideal.

“Las desviaciones, es verdad, son relativamente pequeñas, pero son en jeneral mucho mayores que los errores inevitables de observacion, i son la *espresion numérica exacta de nuestra ignorancia en esta rama de la jeodesia*.

“Es bien conocido que las deflecciones de la vertical pueden ser a veces producidas por masas visibles, pero en resúmen, debe admitirse que poseemos solamente las nociones mas vagas de su causa i un conocimiento inadecuado de su distribucion i estension (R. S. WOODWARD.—*The Mathematical Theories of the Earth*—Washington—1891).

Las desviaciones relativas de la vertical no pasan generalmente de unos cuantos segundos; se ha encontrado, sin embargo, valores extraordinarios en casos especiales. Así en Crimea, cerca de la costa escarpada i mar profundo, se observó un valor de 44 segundos; en Italia 30 segundos, cerca de los Alpes, i lo que es aun mas notable, el hecho de que en la ciudad de Viena entre los dos observatorios situados a 12521 metros de distancia existe una desviacion relativa de $3.2''$, lo que corresponde próximamente a 100 metros. (Consúltese las actas de la Asociacion Jeodésica i los *Anales del Instituto Jeográfico Militar* de Viena). No hemos encontrado en ninguna publicacion valores mayores que el primero de los citados, pero Helmert en el primer tomo de su jeodesia superior indica $1\frac{1}{2}'$ como límite (HELMERT.—*Die Mathematischen und Physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie*—Leipzig—1880, página 16).

En lo referente a los cálculos preliminares de una triangulacion, es enteramente indiferente cual elipsoide de los publicados hasta la fecha se tome como base, pues las diferencias que resultan son enteramente despreciables; no así en las coordenadas jeográficas si se trata de un estudio delicado i cuyas diverjencias con las observadas o astronómicas nos dan indicaciones sobre si es necesario modificar el achatamiento o dimensiones del elipsoide, lo que es el caso cuando el valor de las diverjencias es dependiente de la distancia al punto de partida, o bien que este último ha sido mal elegido, lo que se reconoce cuando la diferencia citada queda mas o ménos constante; se procurará en la eleccion definitiva del elipsoide de comparacion que la suma de las discrepancias negativas sea aproximadamente igual a la de las positivas.

Al ejecutar una triangulacion para la mensura de un pais, se parte de la aceptacion de un elipsoide jeneral, lo que para su representacion gráfica no tiene importancia, pues basta examinar los valores de la longitud de un grado a distintas latitudes calculadas por diversos elipsoides; damos a continuacion una tabla para los límites de Chile:

Latitud	Elipsoide Bessel 1841	Elipsoide Clarke 1866
20°	110693 metros	110692 metros
25	110762	110761
30	110841	110840
35	110929	110928
40	111023	111023
45	111119	111121
50	111216	111219
55	111311	111315

Llama en realidad la atencion el hecho curioso espuesto por Helmert en la conferencia de 1896 que la mensura del último arco ruso deja de manifesto que el elipsoide de Clarke calza mejor a la curvatura de los meridianos, i el de Bessel a la de los paralelos; sin embargo, fácil es darse cuenta de las complicaciones que

se introducirían en los cálculos i tablas con la aceptacion de un elipsoide de tres ejes; no creemos que con ello se ganara mucho en exactitud.

Segun Wolf el radio medio del globo queda suficientemente bien determinado con las medidas de grados; no así su achatamiento, i, en efecto, las diverjencias que se nota en la serie de valores publicados, que pasan de veinte en número, conduce naturalmente a pensar en la causa de ellas. Pero si se toma en cuenta que sólo tres ónceavos de la superficie del globo son de tierra i que la parte accesible al trabajo jeodésico es aun menor, se comprende que la deduccion de la forma jeneral debe sufrir con ello. Aquí interviene la importancia de las observaciones de gravedad, pues ellas se pueden ejecutar hasta en las islas, pero se tropieza con el grave inconveniente, si se quiere distribuirlas por todo el globo, de la reduccion al nivel del mar i de ahí la discrepancia notable entre los valores dados por Faye, Clarke i Helmert.

Ademas, el achatamiento es un valor estremadamente sensible a los errores de mensura, como lo hace notar el profesor Martus, de Berlin, segun sus cálculos, tomando por base el arco de meridiano ruso dividido en dos partes de aproximadamente 1370 kilómetros la norte i 1451 la sur, el valor del achatamiento deducido es $\frac{1}{295}$. Ahora, para estudiar la sensibilidad de este número introduce en el arco norte un error de + 10 metros i de - 10 en el arco sur i con estos nuevos valores afectados de errores mui posibles, deduce nuevamente un achatamiento de $\frac{1}{293}$. Suponiendo nuevamente ahora, un error de - 10 metros en el arco norte i de + 10 en el sur, el achatamiento obtenido es $\frac{1}{297}$, con lo que queda suficientemente esplicada la sensibilidad de este valor (Martus—*Astronomische Geographie*—Leipzig, 1888).

Respecto a la eleccion de un elipsoide para los cálculos en nuestro pais, no hemos vacilado en aceptar el de Clarke 1866, pues al de Bessel hai ya casi unanimidad en suponerlo pequeño, habiendo sido sustituido en Estados Unidos por el primero, i respecto al de Faye no conocemos tablas completas que faciliten los cálculos, no usándose ni en Francia, donde la Carta del Estado Mayor ha seguido calculándose por el elipsoide de Delambre.

Con la lijera esposicion anterior creemos haber dejado de manifiesto la importancia del cálculo de las coordenadas jeográficas en lo que se refiere al estudio de la tierra, pero ella no es menor en la mensura del pais. Böersch se espresa respecto a este punto diciendo que en las coordenadas jeográficas que en la gran mayoría de los casos se publican como resultado final de los cálculos de la mensura del pais, tenemos un sistema de coordenadas sobre una superficie de proyeccion que es parecida a la figura matemática de la superficie terrestre i que, sin influencia en su exactitud, se deja estender sobre todo el esferoide de rotacion. Para los fines prácticos no es directamente aplicable este modo de representacion porque da los resultados solamente en medida angular (Böersch—*Anleitung zur Berechnung Geodætischer Coordinaten*—Cassel, 1885.)

Respecto al significado de las coordenadas jeográficas en jeodesia i que se espresan hasta 0,001" i tambien 0,0001", ello no quiere decir que los valores

correspondientes al punto de partida tengan esa precision; tiene por objeto expresar simplemente la exactitud obtenida por triangulacion, o sea la precision jeodésica, i los valores dados no son sino la suma algebráica de las diferencias de coordenadas calculadas por las fórmulas de jeodesia i los valores absolutos aceptados para el punto oríjen o *punto cardinal*, como suele denominársele. En efecto, con las mejores observaciones de latitud en las circunstancias de observacion i con los métodos reputados como susceptibles de dar la mayor precision, sólo puede hoy dia obtenerse la latitud a $0,1''$ i como un segundo de arco es proximalmente $10000000 : 324000 = 31$ metros, se tendrá una aproximacion de 3.1 metros, sin entrar por el momento en otras consideraciones.

Segun Jordan (*Handbuch der Vermessungskunde*—III—Stuttgart—1896) hoy dia se puede obtener en las triangulaciones jeodésicas una precision de aproximadamente $\pm 0,1$ metros en grandes distancias i $\pm 0,01$ en pequeñas i por tanto, muy superior a la precision de las coordenadas observadas directamente.

Ademas, la latitud jeográfica que hasta pocos años se consideraba como un valor invariable, no lo es, i las numerosas i prolijas observaciones ejecutadas segun acuerdo de la Asociacion Jeodésica Internacional, han demostrado que tiene una variacion comprendida entre los límites $-0.3''$ i $+0.3''$. Luego se podrá obtener $0.6''$ como máximo de diferencia, es decir $31 \times 0.6 = 18.6$ metros.

Aunque Laplace habia escrito "Toda la astronomía reposa sobre la invariabilidad del eje de rotacion de la tierra sobre la superficie del esferoide terrestre i sobre la uniformidad de esta rotacion" (*Mécanique Céleste*—Paris—1882—Tomo V, página 22), no habia dejado de llamar la atencion las pequeñas variaciones observadas en la latitud del Observatorio de Pulkowa, hasta que Fergola propuso en el Congreso Jeodésico de Roma, en 1883, el estudio serio de esta cuestion. Diez años de prolijas observaciones han demostrado enteramente ya que el eje de la tierra no es invariable i que jira sobre un camino irregular alrededor de su posicion media comprendido dentro de los límites ya indicados.

Sin embargo, el profesor Albrecht, en la Conferencia de Berlin de 1895, se expresaba en el sentido de que nos encontramos respecto a las variaciones del polo en el estado de una primera aproximacion. Anualmente se publican las curvas completas construidas segun los cálculos del Instituto Jeodésico i puede consultarse: Th. Albrecht—*Bericht ueber den Stand der Breitenvariation am Schlusse des Jahres 1899*—Berlin—1900.

Aunque hasta hoy dia no existe una explicacion con el carácter de definitiva sobre esta variacion, diremos que Tisserand habia hecho referencia a la influencia de una gran masa de aire en movimiento. Creemos de interes la lectura de los siguientes trabajos publicados sobre la materia: Helmert—*Astronomische Nachrichten*—1891.—Obrecht—*Anales del Observatorio*—1898—paj. 33.

Respecto a la eleccion del punto cardinal u oríjen de las coordenadas, se trata en cada caso que sea uno libre en lo posible de desviaciones de la vertical, ejecutándose en él largas series de latitud i aceptando la longitud como $0^\circ 0' 0'',000$. En algunos paises se ha partido de las coordenadas del observatorio principal

refiriéndolas al punto de estacion en el cual se ha determinado el primer azimut, otras veces se ha ejecutado una serie de observaciones alrededor de un punto i reducido todas a él, tomando el promedio de los resultados. Se ha tratado varias veces de calcular la influencia de las masas de cerros visibles sobre la vertical; el jeodesta suizo Messerschmidt indica que es suficiente limitarse al estudio dentro de un radio de 30 kilómetros.

La eleccion de un meridiano cero dentro del pais, presenta la ventaja de que, en el caso que la lonjitud con respecto a Greenwich o París se determine mas tarde con mayor precision, no es necesario alterar todos los valores publicados para los vértices de las triangulaciones. En efecto, la lonjitud jeneralmente en cada levantamiento se ha perfeccionado poco a poco; así en el levantamiento de Java sólo el sexto valor se aceptó como definitivo.

En cuanto a la latitud, si después de ejecutados los cálculos se varía el elipsoide, se modifican aquéllos por medio de fórmulas diferenciales o tablas calculadas segun ellas; así en Estados Unidos se han publicado tablas para pasar de arcos del elipsoide Bessel 1841 al Clarke 1866 (*Coast and Geodetic Survey-Report 1875*, página 367, desde latitud 23° a 45°). Para el caso de modificacion del punto de partida se ha procedido de un modo semejante; tenemos, por ejemplo, las fórmulas deducidas por Aimonetti (*Rivista de Topografia e Catasto*, Volumen XII, página 110-1900. *Formole pel calcolo delle variazioni che subiscono le coordinate geographiche dei vertice di una rete trigonométrica in funzioni delle variazioni dalle coordinate dell'origine.*)

Dado que las normales correspondientes a dos puntos situados sobre el elipsoide i que no se encuentran ni en un mismo meridiano ni paralelo, no se cortan, sucede en jeneral que de los dos puntos de estacion se obtendrán secciones normales distintas, puesto que el plano que contiene a la normal de uno de ellos no contiene a la del otro aunque el punto mismo esté situado sobre él. Las observaciones astronómicas ejecutadas en uno de los puntos nos darian el azimut de la seccion normal, si admitimos que no existe desviacion de la vertical, o sea el *azimut astronómico*. Se puede calcular fácilmente el azimut jeodésico siendo la correccion al astronómico mui pequeña; en efecto, la diferencia entre ambos en latitudes medias es de $0.01''$ para una distancia de 100 kilómetros. Además la altura del punto visado influirá tambien, pero con signo contrario, destruyéndose en parte con la correccion anterior; su influencia es de $0.01''$ para 250 metros. Jeneralmente en la práctica se las desprecia, de modo que sólo entra a considerarlas en mui largas distancias o visuales fuertemente inclinadas.

En cuanto a la línea jeodésica, ella no interviene en los cálculos corrientes, no puede ser medida directamente i solamente calculada como un elemento auxiliar en las grandes mensuras jeodésicas.

Para los cálculos sobre el elipsoide sabemos que se reemplaza éste por una esfera osculadora cuyo radio se toma segun los casos, ya sea igual al radio de curvatura en el meridiano o en la seccion trasversal, siendo éste la gran normal. Los valores de estos radios de curvatura o sus logaritmos que entran en las

fórmulas se calculan por las fórmulas conocidas que se deducen en los testos de Jeodesia; si llamamos R_m el radio de curvatura en el meridiano i N la gran normal, tenemos:

$$R_m = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^{\frac{3}{2}}} \quad i$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \phi}}$$

con las anotaciones usadas jeneralmente para la elipse. Si hacemos:

$$\sqrt{1-e^2 \sin^2 \phi} = (1-e^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}} = W$$

escribiremos:

$$R_m = \frac{a(1-e^2)}{W^3} \quad i \quad N = \frac{a}{W}$$

Los valores de log W se dan en algunas tablas, así en las de Albrecht se las da para el elipsoide de Bessel, de 10' en 10' (*Formeln und Huelfstafeln fuer geographische Ortsbestimmungen*—Leipzig—1894.)

Se hace uso para el cálculo de los radios de curvatura, de los desarrollos en serie bajo diversas formas, recomendamos sobre la materia la consulta de la memoria del astrónomo Angelitti agregada a las publicaciones del Observatorio de Palermo (*Formole e teoremi relativi all'ellissoide terrestre*.—Napoli—Memoria prima—1898.—Memoria seconda—1899.)

Para la formacion de tablas se hace el cálculo para una variacion de 10 minutos en latitud, interpolando despues de minuto en minuto por las fórmulas de interpolacion de Bessel o Newton.

Encontramos logaritmos de radios de curvatura en las siguientes publicaciones, fuera de las tablas jeográficas de Albrecht, ya citadas; en la forma $\frac{1}{R_m \sin 1''}$

i $\frac{1}{N \sin 1''}$ entran en las fórmulas jeneralmente.

ELIPSOIDE DE CLARKE 1866

U. S. Coast and Geodetic Survey.—Report 1884, para latitudes desde 23° a 64°.

U. S. Coast and Geodetic Survey.—Report 1894, para latitudes desde 18° a 71°, bajo el título:

C. A. SCHOTT.—*Formulae and tables for the computation of geodetic positions*.—Parte II, páginas 277 a 348.—Las tablas anteriores son de minuto en minuto.

J. HOWARD GORE. *Elements of Geodesy*.—New York—1893.—De 10 en 10 minutos i latitudes de 24° a 49°.

ELIPSOIDE DE BESSEL 1841

Tablas de Albrecht, de 10 en 10 minutos, para latitudes de 30° a 64° .

HELMERT.—*Die mathematischen und physikalischen Theorien der Hoeheren Geodaesie*.—Leipzig, 1880.—Latitudes 0° a 85° , log W.

JORDAN.—*Handbuch der Vermessungskunde III*—Stuttgart, 1896. Diversos valores i tablas de coeficientes de fórmulas jeodésicas.

BOERSCH.—*Anleitung zur Berechnung geodaetischer Coordinaten*.—Cassel, 1885. Latitudes 36° a 71° i 10 en 10 minutos.

JADANZA.—*Elementi di Geodesia*.—Torino, 1895.—Edicion autolitográfica.—Latitudes 35° a 47° , de 10 en 10 minutos.

JADANZA.—*Guida al calcolo delle coordinate geodetiche*.—Torino, 1891.—Latitudes 35° a 70° , de 10 en 10 minutos.

HARTL.—*Tafeln enthaltend die Ausmasse der Meridian- und Parallelkreis-Bögen, dann die Logarithmen der Kruemmungs-Radien des Besselschen Erdellipsoides—Mittheilungen des Kaiserl. und Königl. Militaer-Geographischen Institutes*.—XIV, Band, 1894.—De 10 en 10 minutos del ecuador a 40° i de minuto en minuto desde 40° a $51^{\circ} 30'$, volviendo nuevamente de 10 en 10 hasta el polo. — Da mas detallada la zona correspondiente a Austria Hungría.

BAUERNFEIND.—*Elemente der Vermessungskunde II*.—Stuttgart, 1890.—Latitudes 47° a 53° , de 10 en 10 minutos.

El cálculo de estas tablas se hace con logaritmos de 10 decimales jeneralmente, para lo que se emplea la tabla de Véga, *Thesaurus Logarithmorum Completus*—Lipsiae, 1794.—Este libro es mui escaso i sólo se adquiere a alto precio, el Instituto Jeográfico Militar de Florencia ha hecho una edicion fotozincográfica en 1896. que se obtiene al precio de 30 liras.

Los cálculos de las coordenadas jeográficas se ejecutan, como hemos dicho, con siete decimales logarítmicas, con las tablas comunes de 10 en 10 segundos, de Callet, Schöen, Dupuis, Véga, etc., o las de segundo en segundo de Shortrede, calculadas para los trabajos ingleses.

Entre las diversas soluciones que se ha dado al problema del cálculo de las coordenadas jeográficas por azimut i distancia, hai algunas jenerales a cualquier dimension, aun mas allá de la visibilidad, otras prácticamente exactas dentro de los límites de ésta i, por fin, algunas para pequeñas distancias i cómodas en la triangulacion secundaria e inferior. Los procedimientos jenerales a cualquier distancia exigen el empleo de logaritmos de diez decimales, si se desea la exactitud jeodésica, porque interviene siempre la latitud reducida o esférica.

Los cálculos se ejecutan signiendo ciertos polígonos i que quedan comprobados por la doble determinacion de las coordenadas de los puntos comunes, no debiéndose elejir los lados mui largos cuando existen otros mas pequeños, en el caso de fórmulas que no son rigurosas, para evitar la intervencion de términos de órden superior.

Debe tomarse especial cuidado en todos los cálculos geodésicos, buscando, siempre que sea posible, comprobaciones. Citaremos, por ejemplo, el hecho de que Jadanza, en las actas de la Academia de Ciencias de Turin, año 1891 a 1892, hace notar un pequeño error en uno de los trabajos europeos mas conocidos i que tiene ya el carácter de clásico.

Entre los métodos mas usados, tenemos los de Bessel, Puissant, Helmert, para largas i pequeñas distancias, Jordan, Schreiber, Schols, usado en Sumatra i, por fin, el de Oudemans, empleado en Java.

Pasamos a esponder, completando los desarrollos, dos métodos que estimamos como mui prácticos, haciendo uso de las tablas correspondientes que agregamos al final, i son los de Oudemans i Puissant. Se encuentran espuestos respectivamente en:

J. A. C. Oudemans.—*Die Triangulation von Java ausgeführt vom Personal des Geographischen Dientes in Niederlaendisch Ost-Indien—Das Primaere Dreiecknetz*—Haag, 1895.

L. Puissant.—*Traité de Géodésie* Paris, 1842. Tome I Se ha espuesto tambien con algunas modificaciones acompañando a las tablas del *Coast Survey* publicadas en diversas épocas.

Aunque el primero de los métodos citados no es aplicable a grandes distancias, creemos que en nuestro pais nos puede prestar útiles servicios por su comodidad.

Método de Oudemans —Se da la latitud ϕ del punto A, el azimut α'_n del punto

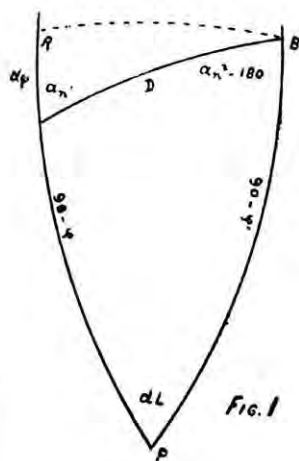


Fig. 1

visado B i contado a partir del Norte en el sentido Este, Sur i Oeste, la distancia del punto igual a D espresada en metros tal como se deduce de la triangulacion i se pide la latitud de B, la diferencia de lonjitud de ambos puntos i el azimut inverso.

Para la determinacion de la diferencia de lonjitud en el elipsoide, proyectamos la distancia D sobre una esfera tangente al paralelo del punto visado, el radio de esta esfera será la gran normal N correspondiente a la latitud del punto, diferenciando la proyeccion sobre la esfera del arco del elipsoide de términos de cuarto orden, despreciables en toda triangulacion que se calcula con logaritmos de siete decimales

Segun la regla de los senos, se tiene:

$$\frac{\text{sen } dL}{\text{sen } D} = \frac{\text{sen } \alpha'_n}{\text{sen } (90 - \phi')}$$

O sea

$$\text{sen } dL = \text{sen } D \sec \phi' \text{ sen } \alpha'_n \quad (1)$$

Ahora, el desarrollo del seno de un arco x es:

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$$

hasta los términos del tercer orden, o bien:

$$\frac{\text{sen } x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \dots \quad (2)$$

Para el coseno, sabemos que

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots$$

i elevando a $\frac{1}{2}$ nos da:

$$\cos \frac{1}{2}x = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Resolviendo por la fórmula de Newton:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \dots$$

se obtiene:

$$\cos \frac{1}{2}x = 1 - \frac{1}{6}x^2$$

que combinado con la ecuacion (2) nos da:

$$\frac{\text{sen } x}{x} = \cos \frac{1}{2}x$$

o bien

$$\text{sen } x = x \text{ arco } 1'' \cos \frac{1}{2}x$$

en segundos de arco.

Esta fórmula es la llamada de Maskelyne, siendo muy cómoda para ángulos pequeños, según Brünnow, aun para el caso $x = 10^\circ$ el error es inferior a $1''$, pero esos valores no se presentan en triángulos medibles en jeodesia donde generalmente se queda bajo un grado.

Segun la fórmula deducida, la (1) nos da:

$$dL = D \text{ sen } a'_n \sec \phi' \frac{\cos \frac{1}{2}D}{\cos \frac{1}{2}dL} \quad (3)$$

El último factor se asemeja mucho a la unidad i en el triángulo esférico rectángulo $A R B$ se tiene con $\cos c = \cos a \cos b$ que

$$\cos D = \cos RA \cos RB$$

o bien:

$$\cos D = \cos d\phi \cos (dL \cos \phi')$$

i elevando a $\frac{1}{2}$:

$$\cos \frac{1}{2}D = \cos \frac{1}{2}d\phi \cos \frac{1}{2}(dL \cos \phi')$$

Si se coloca este valor en la fórmula (3) se tendrá que

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(dL \cos \phi')}{\cos \frac{1}{2}dL} = \cos \frac{1}{2}(dL \sin \phi')$$

difiere mui poco de $\cos \frac{1}{2}$ de la converjencia de meridianos, o sea $dL \sin \frac{\phi' + \phi''}{2}$, especialmente para latitudes pequeñas en donde $\sin \frac{\phi' + \phi''}{2}$ se acerca a cero, i por tanto la fórmula (3) se escribirá haciendo

$$\cos \frac{1}{2} \left(dL \sin \frac{\phi' + \phi''}{2} \right) = a$$

como sigue:

$$dL = D \sin a'_n \sec \phi' \cos \frac{1}{2}d\phi \sec \frac{1}{2}a \quad (4)$$

Esta fórmula nos permite tabular las espresiones que tienen a $\frac{1}{2}$ como espone, bajo la forma

$$f(x) = \frac{1}{2} \log \sec x$$

espresándolas en unidades de la sétima decimal logarítmica. Nos queda en este caso:

$$\log dL = \log [D \sin a'_n \sec \phi'] - f(d\phi) + f(a)$$

o sea en segundos, dado que $R = N$, la gran normal:

$$\log dL = \log D + \log \frac{1}{N \sin 1''} + \log \sin a'_n + \log \sec \phi' - f(d\phi) + f(a)$$

no alcanzando el término $f(a)$ en latitudes pequeñas, jeneralmente a una unidad logarítmica de la sétima decimal.

Examinando la fórmula, se vé que es necesario calcular valores aproximados primeramente para ϕ' i, por tanto, $d\phi$ tambien, debiendo rehacerse el cálculo si altera el valor definitivo.

Para el cálculo de la converjencia de meridianos que hemos denominado a i la diferencia de latitud, se hace la proyeccion sobre la esfera osculadora al elipsoide en el punto medio de la distancia AB i designaremos por N_m el radio de dicha esfera.

Segun una de las analogías de Néper:

$$\cos \frac{1}{2} (A+B) = \frac{\cos \frac{1}{2} (a+b)}{\cos \frac{1}{2} (a-b)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} C$$

aplicada al triángulo ABP , se tendrá con:

$$\begin{aligned} A &= 180^\circ - a'_n & B &= a_n - 180^\circ \\ A+B &= a_n - a'_n = 180^\circ - a & \frac{1}{2}(A+B) &= 90^\circ - \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}(A-B) &= 90^\circ - a'_n + \frac{1}{2}a = 90^\circ - a_{nm} \end{aligned}$$

$$\text{siendo } a_{nm} = \frac{a'_n + a_n}{2}$$

Ademas:

$$\frac{1}{2} (a+b) = 90^\circ - \phi_m, \text{ con } \phi_m = \frac{\phi' + \phi''}{2}$$

$$\frac{1}{2} (a-b) = \frac{1}{2} d\phi \quad \text{i se tiene}$$

que

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} a = \frac{\operatorname{sen} \phi_m}{\cos \frac{1}{2} d\phi} \operatorname{tg} \frac{1}{2} dL \quad (5)$$

Las series de la tangente i secante dentro de la quinta potencia son:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3} x^3 + \dots \quad \sec x = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \dots$$

obteniéndose de la primera:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 + \frac{1}{3} x^2 + \dots \quad (a)$$

i la segunda elevada a $\frac{2}{3}$ da:

$$\sec^{\frac{2}{3}} x = (1 + \frac{1}{2} x^2)^{\frac{2}{3}}$$

que desarrollando por la fórmula de Newton, despreciando potencias de orden superior, se reduce a:

$$\sec^{\frac{2}{3}} x = 1 + \frac{1}{3} x^2$$

combinada con (a)

$$\operatorname{tg} x = x \sqrt[3]{\sec^2 x}$$

otra de las fórmulas de Maskelyne que, aplicada a la fórmula (5), nos da:

$$\frac{1}{2}a \sec \frac{3}{8}a = \frac{\sin \phi_m}{\cos \frac{1}{2}d\phi} \frac{1}{2}dL \sec \frac{3}{8}dL.$$

Si examinamos los desarrollos siguientes ejecutados dentro de la cuarta potencia.

$$\sec \frac{a}{2} = \frac{1}{\cos \frac{a}{2}} = \left(\cos \frac{a}{2} \right)^{-1} = \left(1 - \frac{a^2}{8} \right)^{-1} = 1 + \frac{a^2}{8}$$

$$\sec \frac{1}{4}a = \frac{1}{(\cos a)^{1/4}} = (\cos a)^{-1/4} = \left(1 - \frac{a^2}{2} \right)^{-1/4} = 1 + \frac{a^2}{8}$$

vemos que se podrá reemplazar

$$\frac{1}{\cos \frac{1}{2}d\phi} = \sec \frac{d\phi}{2} \text{ por } \sec \frac{1}{4}d\phi, \text{ i nos quedará:}$$

$$a = dL \sin \phi_m \sec \frac{1}{6}dL \sec \frac{1}{4}d\phi \cos \frac{1}{6}a$$

Con las anotaciones usadas, escribiremos:

$$\log a = \log dL + \log \sin \phi_m + \frac{1}{6}f(d\phi) + \frac{1}{2}f(dL) - \frac{1}{2}f(a)$$

puesto que el valor tabulado es $f(x) = \frac{1}{6} \log \sec x$.

La formula tomada en sus dos primeros términos es la corriente de converjencia de meridianos, el último término $\frac{1}{2}f(a)$ es despreciable puesto que hemos visto que $f(a)$ lo era ya para latitudes pequeñas; si se tratase de fuertes latitudes se haría un cálculo previo de a .

Segun otra de las analogías de Néper:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}C$$

aplicada al mismo triángulo, obtenemos:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}d\phi = \frac{\cos a_{nm}}{\cos \frac{1}{2}a} \operatorname{tg} \frac{1}{2}AB$$

o bien por procedimientos semejantes a los empleados ya:

$$d\phi \sec \frac{1}{6}d\phi = AB \sec \frac{1}{6}AB \cos a_{nm} \sec \frac{1}{2}a.$$

Despejando ahora a $d\phi$ i reemplazando $\sec \frac{1}{2}a$ por $\sec \frac{1}{4}a$, nos da:

$$d\phi = AB \frac{\sec \frac{1}{6} AB}{\sec \frac{1}{6} d\phi} \cos a_{nm} \sec \frac{1}{4} a \quad (6)$$

Hemos encontrado que $\cos \frac{1}{3} D = \cos \frac{1}{3} d\phi \cos \frac{1}{3} (dL \cos \phi')$ i habiendo designado $AB=D$, se obtiene, elevando al cuadrado:

$$\sec \frac{1}{6} AB \cos \frac{1}{6} d\phi = \sec \frac{1}{6} (dL \cos \phi')$$

luego podremos escribir la fórmula (6):

$$d\phi = AB \cos a_{nm} \sec \frac{1}{6} (dL \cos \phi') \sec \frac{1}{4} a \quad (7)$$

El arco AB sobre la esfera, espresado en arco, es $\frac{D}{N_m \sin 1''}$, pero como la diferencia de latitud debe medirse sobre una esfera de radio R_m correspondiente al meridiano, habrá que efectuar la trasformacion multiplicando el número resultante de segundos por la razon de los radios $\frac{N_m}{R_m}$ i se obtiene:

$$d\phi = \frac{D}{R_m \sin 1''} \cos a_{nm} \sec \frac{1}{6} dL \sec \frac{5}{12} a \quad (8)$$

puesto que, despreciando términos de orden superior:

$$\sec \frac{1}{6} (dL \cos \phi') = \sec \frac{1}{6} dL \sec \frac{1}{6} a$$

deducido con

$$\cos \frac{1}{3} (dL \cos \phi') = \cos \frac{1}{3} dL \cos \frac{1}{3} (dL \sin \phi')$$

que aproximadamente, si se eleva al cuadrado, es igual al valor anotado.

Aplicando logaritmos a la fórmula (8) i con las anotaciones usadas, se escribirá:

$$\log d\phi = \log D + \log \frac{1}{R_m \sin 1''} + \log \cos a_{nm} + \frac{1}{2} f(dL) + \frac{3}{4} f(a)$$

Para el cálculo práctico convendrá disponer de tablas; pero como las dadas por Oudemans se refieren a la isla de Java, que se extiende muy poco en latitud i, por tanto, en los cálculos preliminares podemos aceptar un radio jeneral, no así para nuestro país. Copiamos en extracto las tablas calculadas en el *Coast and Geodetic Survey* i dadas en la memoria de 1894. Ellas se refieren al método de Puissant, que luego espondremos, pero se tiene:

$$\log A = \frac{1}{N \sin 1''} \quad \log B = \frac{1}{R \sin 1''}$$

Ademas tomamos de la memoria correspondiente a la triangulacion de primer orden de Java la tabla I, que da los valores de $f(x)$.

Anotaremos en los cálculos:

$$B_m = \frac{1}{R_m \text{ sen } 1''}; \quad A_m = \frac{1}{N_m \text{ sen } 1''}; \quad A_1 = \frac{1}{N_2 \text{ sen } 1''}$$

En el cálculo aproximado de $d\phi$ cuyo conocimiento se requiere para las otras fórmulas, si la rejion no es mui estensa se puede tomar un valor constante

$B = \frac{1}{R \text{ sen } 1''}$ correspondiente a una latitud media. Tratándose de gran estension se puede dividir en zonas, dentro de cada cual aceptamos un radio constante, o tomar cada vez el de la tabla.

El cálculo aproximado de $d\phi$ i casi siempre el de $\log a$ se puede ejecutar con logaritmos de cinco decimales. Si el nuevo valor de ϕ' fuese mui distinto i alterara $\sec \phi'$, se variará esta línea en el cálculo de dL , si influye.

El método espuesto es cómodamente aplicable a distancias menores que un grado jeográfico.

En la triangulacion primaria de la isla de Java, Oudemans empleó su método de cálculo aún para grandes lados i como comprobacion de las fórmulas, en el mayor de toda la triangulacion, a pesar de existir lados menores de union.

Se agrega tambien a la memoria sobre la red de primer orden los cálculos del traspaso de coordenadas i azimuth para el lado máximo, ejecutados por el método usado por Schols en la isla de Sumatra i cuyos resultados están perfectamente de acuerdo con los obtenidos por Oudemans.

RESÚMEN

DE LAS FÓRMULAS PARA EL CÁLCULO DE COORDENADAS
GEOGRÁFICAS POR EL MÉTODO DE OUDEMANS

$$\text{aproximado } \begin{cases} d\phi = B. D \cos a_n \\ \phi' = \phi + d\phi \end{cases}$$

$$\log dL = \log A_2. D \operatorname{sen} a_n' \sec \phi' - f(d\phi)$$

$$L_2 = L - dL$$

$$\log a = \log dL \operatorname{sen} \phi_m + \frac{1}{4}f(d\phi) + \frac{1}{2}f(dL)$$

$$a_n^2 = 180^\circ + a_n' - a$$

i por fin:

$$\log d\phi = \log B_m. D \cos a_{nm} + \frac{1}{2}f(dL)$$

$$\phi' = \phi + d\phi$$

EJEMPLO I

Con datos tomados de las carteras de la IV Sub-Comision de Límites calcularemos algunos ejemplos.

En la estacion 315, rejion del Lago Lacar, i cuyas coordenadas son:

$\phi = -40^\circ 6' 50''.000$, $L = 71^\circ 17' 16''.000$ Oeste Greenwich, se tiene el azimut $168^\circ 56' 23''.00$ sobre el cerro de Chapelco, cuya distancia es de 19450,0 metros. Se desea calcular las coordenadas de este último punto i el azimut inverso. Aceptamos 40° de latitud para el valor de B_m en el cálculo del valor provisorio de ϕ .

Cálculo aproximado de ϕ'

$$\begin{aligned} d\phi &= B_m D \cos a_n' \\ \phi' &= \phi + d\phi \\ \log B_m &= \bar{2}.51085 \\ \log D &= 4.28892 \\ \log \cos a_n' &= \bar{1}.99186_n \\ \log d\phi &= 2.79163_n \\ d\phi &= -618''.91 = -0^\circ 10' 18''.91 \\ \phi &= -40^\circ 6' 50''.00 \\ \phi' &= -40^\circ 17' 8''.91 \text{ aprox.} \end{aligned}$$

Cálculo del azimut

$$\begin{aligned} \log a &= dL \sin \phi_m + \frac{3}{4}f(d\phi) + \frac{1}{2}f(dL) \\ \phi_m &= -40^\circ 11' 59''.4 \\ \log dL &= 2.1985459 \\ \log \sin \phi_m &= \bar{1}.8098663_n \\ \frac{3}{4}f(d\phi) &= 4 \\ \frac{1}{2}f(dL) &= 0 \\ \log a &= 2.0084025_n \\ a &= -101''.95 \text{ (hacia el E)} \\ &= -0^\circ 1' 41''.95 \\ 180^\circ + a_n' &= 348^\circ 56' 23''.00 \\ a_n^2 &= 348^\circ 54' 41''.05 \end{aligned}$$

Cálculo de la diferencia de longitud

$$\begin{aligned} \log dL &= \log A_1 D \sin a_n' \sec \phi' - f(d\phi) \\ L_1 &= L - dL \\ \log A_1 &= \bar{2}.5091111 \\ \log D &= 4.2889196 \quad \text{Correccion por} \\ \log \sin a_n' &= \bar{1}.2829427 \quad \text{var. de } \phi \\ \log \sec \phi' &= 0.1175731 \quad -1 \\ -f(d\phi) &= -6 \\ \log dL &= 2.1985459 \quad 2.1985458 \\ \text{Valor prov. } dL &= 157''.96 \quad 157''.959 \\ -dL \text{ corregido} &= 0^\circ 2' 37''.959 \\ L &= 71^\circ 17' 16''.000 \\ L - dL = L_1 &= 71^\circ 14' 38''.041 \end{aligned}$$

Cálculo de la diferencia de latitud

$$\begin{aligned} \log d\phi &= \log B_m D \cos a_{nm} + \frac{1}{2}f(dL) \\ \phi' &= \phi + d\phi \\ a_{nm} &= 168^\circ 55' 32'' \\ \log B_m &= \bar{2}.5108365 \\ \log D &= 4.2889196 \\ \log \cos a_{nm} &= \bar{1}.9918365_n \\ \frac{1}{2}f(dL) &= 0 \\ \log d\phi &= 2.7915926_n \\ d\phi &= -6' 18''.860 \\ d\phi &= -0^\circ 10' 18''.860 \\ \phi &= -40^\circ 6' 50''.000 \\ \phi' &= -40^\circ 17' 8''.860 \end{aligned}$$

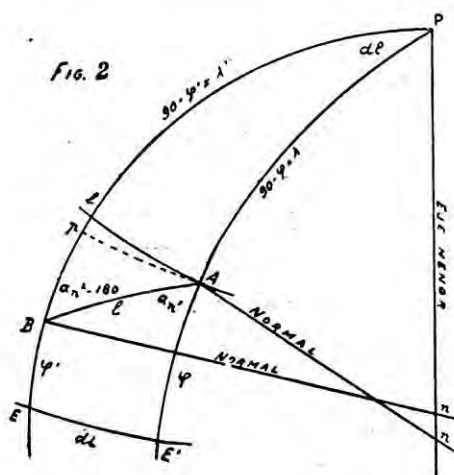
Cerro Chapelco

$$\phi = -40^{\circ}17' 8''.860$$

$$L = 71^{\circ}14'38''.041$$

$$\text{Azimut a 315} = 348^{\circ}54'41''.05$$

Método de los factores de Puissant.—Aunque su deducción es algo complicada, su aplicación práctica, haciendo uso de las tablas del Coast Survey, no presenta dificultad, siendo de mayor precisión que el método espuesto i aplicable a mayores distancias. Pasamos a esponerlo completando los desarrollos con sólo muy ligeras modificaciones.



Sean dos puntos A i B (fig. 2); $l = AB$, la línea jeodésica que los une; $An = N$, $Bn' = N'$, las normales al elipsoide. Suponemos los azimutes como en el primer caso, a partir del Norte, i tenemos a'_n como azimut sobre B en el punto de estacion A ; entónces $PAB = 180^{\circ} - a'_n = x$, $PBA = a^2_n - 180^{\circ}$ i además $AE' = \phi$, $BE = \phi'$, $90^{\circ} - \phi = \lambda$ i $90^{\circ} - \phi' = \lambda'$.

El triángulo esférico APB nos da: $\cos \lambda' = \cos \lambda \cos l + \sin \lambda \sin l \cos x$; pero como el arco l es siempre pequeño i rara vez pasa de un grado, quedando jeneralmente menor que 30 minutos,

podemos aplicar los desarrollos en serie rápidamente converjente, puesto que dicho arco entra al lado de valores mayores jeneralmente λ i λ' . La fórmula de Taylor

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \dots$$

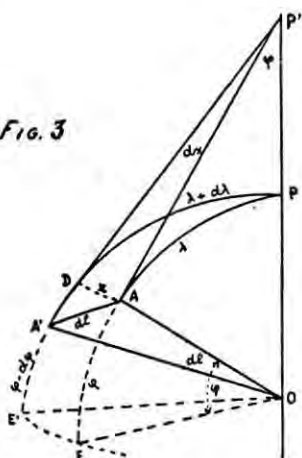
que con $a=0$ nos da la de Mac-Laurin

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \dots$$

i en nuestro caso:

$$\lambda' = \lambda + \frac{d\lambda}{dl} l + \frac{1}{2} \frac{d^2 \lambda}{dl^2} l^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3 \lambda}{dl^3} l^3 + \dots$$

Fig. 3



Con el objeto de encontrar los coeficientes diferenciales de esta fórmula, consideremos un triángulo esférico infinitamente pequeño (fig. 3), $AA'P$, siendo $AP = \lambda$, $A'P = \lambda + d\lambda$, $AA' = dl$, i, por fin, AD un paralelo.

El triángulo infinitamente pequeño $AA'D$ lo podemos tratar como plano i tenemos:

$$d\lambda = dl \cos (180^\circ - x)$$

i por tanto

$$\frac{d\lambda}{dl} = -\cos x$$

como espresion del primer coeficiente diferencial. Diferenciando i dividiendo por dl nos da:

$$\frac{d^2 \lambda}{dl^2} = \sin x \frac{dx}{dl}$$

En esta fórmula dx , variacion de x , representa la converjencia de los meridianos i, por tanto, el ángulo $A'P'A$ de las tangentes i medido por el arco AD con AP' como radio, luego:

$$dx = \frac{\text{arco } AD}{AP'}$$

Pero el mismo triángulo $AA'D$ nos da que $AD = AA' \cos (x - 90^\circ)$, luego:

$$dx = \frac{\text{arco } AA' \sin x}{AP'}$$

El arco AA' tiene por valor dl , AO , siendo dl el ángulo i AO el radio, luego:

$$dx = \frac{dl \sin x AO}{AP'} = dl \sin x \tan \phi$$

puesto que los ángulos AOE i $AP'O$ tienen sus lados perpendiculares i como $\lambda = 90^\circ - \phi$, escribiremos:

$$dx = dl \sin x \cot \lambda$$

$$\frac{dx}{dl} = \sin x \cot \lambda$$

Llevando este valor a la espresion del segundo coeficiente, nos da para éste fácilmente:

$$\frac{d^2 \lambda}{dl^2} = \sin^2 x \cot \lambda$$

Calculamos ahora el tercer coeficiente diferencial:

Tenemos

$$\frac{d\lambda}{dl} = -\cos x \quad (I)$$

$$\frac{dx}{dl} = \sin x \cot \lambda \quad (II) \quad \text{ i } \quad \frac{d^2 \lambda}{dl^2} = \sin^2 x \cot \lambda \quad (III)$$

debiendo determinar

$$\frac{d^3 \lambda}{dl^3}$$

Derivamos la ecuación III, recordando que x i λ son funciones de l i, por consiguiente, aplicaremos la fórmula de la derivada de las funciones compuestas, luego poniendo:

$$\frac{d^2 \lambda}{dl^2} = y$$

$$y = f(x, \lambda) \quad x = \phi(l) \quad \lambda = \psi(l)$$

i aplicando la fórmula conocida

$$\frac{dy}{dl} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dl} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dl}$$

nos da:

$$\frac{dy}{dl} = \frac{d^3 \lambda}{dl^3} = 2 \sin x \cos x \cot \lambda \frac{dx}{dl} + \left(-\frac{1}{\sin^2 \lambda} \right) \frac{d\lambda}{dl}$$

Reemplazando ahora los coeficientes $\frac{dx}{dl}$ i $\frac{d\lambda}{dl}$ por sus valores II i I, tendremos:

$$\frac{d^3 \lambda}{dl^3} = 2 \sin x \cos x \cot \lambda \cdot \sin x \cot \lambda + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \lambda} \cos x$$

Sabemos que

$$\frac{1}{\sin^2 \lambda} = 1 + \cot^2 \lambda$$

luego:

$$\frac{d^3 \lambda}{dl^3} = 2 \sin x \cos x \cot \lambda \cdot \sin x \cot \lambda + \sin^2 x \cos x (1 + \cot^2 \lambda)$$

o bien

$$\frac{d^3 \lambda}{dl^3} = 2 \sin^2 x \cos x \cot^2 \lambda + \sin^2 x \cos x + \sin^2 x \cos x \cot^2 \lambda$$

i con $\sin^2 x \cos x$ como factor comun, se tiene finalmente:

$$\frac{d^3 \lambda}{dl^3} = \sin^2 x \cos x (1 + 3 \cot^2 \lambda)$$

que es el tercer coeficiente buscado.

Johnson (*The Theory and Practice of Surveying*—páj. 696—New York—1900) indica otro método para deducir estos coeficientes.

Tenemos, en resumen:

$$1.^{\text{er}} \text{ coeficiente diferencial } \frac{d\lambda}{dl} = -\cos x$$

$$2.^{\text{o}} \quad \quad \quad \frac{d^2\lambda}{dl^2} = \sin^2 x \cot \lambda$$

$$3.^{\text{er}} \quad \quad \quad \frac{d^3\lambda}{dl^3} = \sin^2 x \cos x (1 + 3 \cot^2 \lambda)$$

que, llevados a la fórmula

$$\lambda' = \lambda + \frac{d\lambda}{dl} l + \frac{1}{2} \frac{d^2\lambda}{dl^2} l^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3\lambda}{dl^3} l^3 + \dots$$

nos da:

$$\lambda' - \lambda = -l \cos x + \frac{1}{2} l^2 \sin^2 x \cot \lambda + \frac{1}{6} l^3 \sin^2 x \cos x (1 + 3 \cot^2 \lambda) + \dots$$

Reemplazando λ , λ' i x por sus valores $90^\circ - \phi$, $90^\circ - \phi'$ i $180^\circ - a_n'$, escribiremos:

$$\phi - \phi' = l \cos a_n' + \frac{1}{2} l^2 \sin^2 a_n' \operatorname{tg} \phi - \frac{1}{6} l^3 \sin^2 a_n' \cos a_n' (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \phi) + \dots$$

Aquí el primer término del segundo miembro representa la distancia desde B al pié p , de la perpendicular bajada desde A . el segundo, con bastante aproximación, la distancia de p al paralelo que pasa por A , siendo los términos restantes simples correcciones que aumentan la exactitud.

Si suponemos una esfera de radio igual a la gran normal que corresponde al punto A , i siendo K el valor en metros del arco l , tendremos $l = \frac{K}{N}$ i reemplazando:

$$\phi - \phi' = \frac{K \cos a_n'}{N} + \frac{1}{2} \frac{K^2 \sin^2 a_n' \operatorname{tg} \phi}{N^2} - \frac{1}{6} \frac{K^3 \sin^2 a_n' \cos a_n'}{N^3} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \phi) + \dots$$

Para referir la diferencia de latitud a la esfera de radio R_m de curvatura en el meridiano i para la latitud media, sería necesario conocer ésta; luego nos conviene mas referirla a una esfera de radio R en el punto A i cuya latitud conocemos, aplicando despues una correccion debida a la razon de R a R_m . Luego, si multiplicamos la última ecuacion por $\frac{N}{R}$ i dividimos por $\sin 1''$, tendremos $\phi - \phi' = -d\phi$, expresado en segundos de arco i escribiremos:

$$-d\phi = \frac{K}{R \operatorname{sen} 1''} \cos a_n' + \frac{1}{2} \frac{K^2}{RN \operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen}^2 a_n' \operatorname{tg} \phi$$

$$- \frac{1}{6} \frac{K^3}{RN^2 \operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen}^2 a_n' \cos a_n' (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \phi)$$

Para el cálculo práctico de esta fórmula, se tabula los logaritmos de

$$\frac{1}{R \operatorname{sen} 1''} = B \quad \text{ i } \quad \frac{\operatorname{tg} \phi}{2 RN \operatorname{sen} 1''}$$

con ϕ como argumento. Además, si designamos por h el valor del primer término i lo llevamos al tercero, se obtiene:

$$\frac{1}{6} h \frac{K^2 \operatorname{sen}^2 a_n'}{N^2} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \phi)$$

lo que nos permite tabular otro factor

$$E = \frac{1 + 3 \operatorname{tg}^2 \phi}{6N^2}$$

i la fórmula será.

$$-d\phi = K \cos a_n' B + K^2 \operatorname{sen}^2 a_n' C - h K^2 \operatorname{sen}^2 a_n' E + \dots$$

Para obtener el valor de $d\phi$, referido a la esfera de radio R_m , tenemos que incrementar $d\phi$ en

$$\frac{R - R_m}{R_m} d\phi$$

i sabemos que

$$R = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi)^{3/2}} \quad R_m = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi_m)^{3/2}}$$

luego:

$$R - R_m = a(1 - e^2) \left(\frac{1}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi)^{3/2}} - \frac{1}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi_m)^{3/2}} \right)$$

o bien

$$R - R_m = a(1 - e^2) \frac{\frac{3}{2} e^2 (\operatorname{sen}^2 \phi - \operatorname{sen}^2 \phi_m)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi)^{3/2} (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi_m)^{3/2}}$$

Desarrollando i despreciando todos los términos con potencias mayores que e^2 , tomando ademas en cuenta que

$$\sin^2 \phi - \sin^2 \phi_m = \sin (\phi - \phi_m) \sin (\phi + \phi_m) = \text{prox. } d\phi \sin 1'' \sin \phi \cos \phi,$$

puesto que

$$\frac{1}{2} \sin 2\phi = \sin \phi \cos \phi$$

podremos anotar:

$$\begin{aligned} \frac{R - R_m}{R_m} &= \frac{a(1 - e^2)^{3/2} e^2 d\phi \sin 1'' \sin \phi \cos \phi}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2} (1 - e^2 \sin^2 \phi_m)^{3/2}} \cdot \frac{(1 - e^2 \sin^2 \phi_m)^{3/2}}{a(1 - e^2)} \\ &= \frac{\frac{3}{2} e^2 d\phi \sin 1'' \sin \phi \cos \phi}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} \end{aligned}$$

i tabulando

$$D = \frac{\frac{3}{2} e^2 \sin \phi \cos \phi \sin 1''}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}}$$

la fórmula del término correctivo será:

$$\frac{R - R_m}{R_m} d\phi = (d\phi)^2 D.$$

Tendremos, por fin, para la verdadera diferencia de latitud:

$$-d\phi = K \cos a_n' B + K^2 \sin^2 a_n' + (d\phi)^2 D - hK^2 \sin^2 a_n' E$$

Respecto a esta fórmula, de fácil aplicacion con los valores $\log B$, $\log C$, $\log D$ i $\log E$ deducidos de las tablas del *Coast Survey*, se puede agregar que el último término, es jeneralmente despreciable, siendo insensible para $K < 16$ kilómetros o lo que es lo mismo, $\log K < 4.20$ espresado en metros.

Se tomará en cuenta $(d\phi)^2 D$ si $\log h > 2.31$, i h^2 puede reemplazarse a $(d\phi)^2$ siempre que $\log K < 4.93$.

Al despreciar el cuarto coeficiente diferencial, el error no excede nunca a $0.001''$ para $l = 1^\circ$ o $K = \text{prox } 111$ kilómetros, i de ahí que en la práctica no se le tome en cuenta sino raras veces. Cuando los lados no exceden 20 kilómetros en la triangulacion secundaria, la fórmula se reduce sin inconveniente a

$$-d\phi = K \cos a_n' B + K^2 \sin^2 a_n' C + h^2 D.$$

Deduzcamos ahora la diferencia de lonjitud, o sea dL , entre las lonjitudes L i L' de A i B contadas de Este a Oeste. Hacemos uso de la latitud calculada para B , o sea ϕ' .

Tenemos en el triángulo esférico APB :

$$\frac{\text{sen } \lambda}{\text{sen } x} = \frac{\text{sen } l}{\text{sen } dL}$$

i refiriendo el arco l a una esfera con N' , normal de B , como radio, tendremos:

$$l = \frac{K}{N'}$$

Suponemos por el momento proporcionarles los pequeños arcos l i dL a sus senos, luego:

$$dL = \frac{K \text{ sen } a_n'}{N' \cos \phi' \text{ sen } 1''} \quad \text{en segundos de arco.}$$

Se tabula el factor

$$A = \frac{1}{N' \text{ sen } 1''}$$

i que se tomará con ϕ' como argumento, tenemos:

$$dL = \frac{K \text{ sen } a_n' A}{\cos \phi'}$$

El error que se comete al aceptar la proporcionalidad de los senos, se corrige por medio de una tabla de diferencias entre los arcos i líneas. Se buscará la diferencia entre $\log K$ i $\log dL$, dándole al primero el signo negativo i al segundo el positivo i agregando su suma algebráica a $\log dL$; el signo de dL depende del de $\text{sen } a_n'$, que es positivo entre 0° i 180° .

Para calcular el azimut inverso a_n^2 recurrimos al mismo triángulo esférico APB que nos da con las designaciones x i x' para los ángulos en A i B , obteniendo por una de las analogías de Néper

$$\text{tj } \frac{1}{2}(A + B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}(a + b)} \cot \frac{C}{2}$$

escrita con respecto a la cotanjente:

$$\cot \frac{1}{2}(x + x') = \text{tj } \frac{1}{2} dL \frac{\cos \frac{1}{2}(\lambda + \lambda')}{\cos \frac{1}{2}(\lambda' - \lambda)}$$

o sea

$$\cot \frac{1}{2}(x + x') = \text{tj } \frac{1}{2} dL \frac{\text{sen } \frac{1}{2}(\phi + \phi')}{\text{sen } \frac{1}{2}(\phi' - \phi)}$$

Pero sabemos que $x = 180^\circ - a_n'$ i por tanto,

$$\cot \frac{1}{2}(180^\circ - a_n' + x') = -\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x' - a_n')$$

o bien:

$$-\operatorname{tg} \frac{1}{2}(da_n') = \operatorname{tg} \frac{1}{2}dL \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\phi + \phi')}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\phi' - \phi)}$$

Suponiendo las tangentes de $\frac{1}{2}(da_n')$ i $\frac{1}{2}d\phi$ proporcionales a los arcos correspondientes, tenemos:

$$-da_n' = dL \frac{\operatorname{sen} \phi_m}{\cos \frac{1}{2}d\phi} \quad i$$

$$a_n^2 = a_n' + 180^\circ + da_n'$$

Si se trata de un valor grande para dL , será necesario corregir el error cometido por la aceptacion de la proporcionalidad indicada mas arriba, por medio de una tabla que nos dé la diferencia entre las tangentes i los arcos. En las tablas del *Coast Survey* se deduce la fórmula de correccion:

$$+ \frac{1}{12} (dL)^3 \operatorname{sen} \phi_m \cos^2 \phi_m \operatorname{sen}^2 1''$$

para lo cual se escribe $+(dL)^3 F$, tabulando el valor de

$$F = \frac{\operatorname{sen} \phi_m \cos^2 \phi_m \operatorname{sen}^2 1''}{12}$$

Cuando $\log dL = 3.36$, este término alcanza a $0.01''$ i no se usa en ningun caso en la triangulacion secundaria, salvo triángulos especialmente grandes. Ademas se da una tabla para

$$\frac{1}{\cos \frac{1}{2}d\phi} = \sec \frac{1}{2}d\phi$$

término que se desprecia para distancias menores que 30 kilómetros.

RESÚMEN

DE LAS FÓRMULAS PARA EL CÁLCULO DE COORDENADAS GEOGRÁFICAS POR EL MÉTODO DE PUISSANT

$$-d\phi = K \cos a_n' B + K^2 \operatorname{sen}^2 a_n' C + (d\phi)^2 D - h K^2 \operatorname{sen}^2 a_n' E$$

$$\phi' = \phi - d\phi$$

Para $K < 20 \text{ km}$: $-d\phi = K \cos a_n' B + K^2 \operatorname{sen}^2 a_n' C + h^2 D$

$$h = K \cos a_n' B$$

$$dL = \frac{K \operatorname{sen} a_n' A_1}{\cos \phi'} \quad -d a_n' = dL \frac{\operatorname{sen} \phi_m}{\cos \frac{1}{2} d\phi} + (dL)^3 F$$

$$a_n^2 = a_n' + 180^\circ - d a_n'$$

Los factores tabulados:

$$A = \frac{1}{N \operatorname{sen} 1''}$$

$$B = \frac{1}{R \operatorname{sen} 1''}$$

$$C = \frac{\operatorname{tg} \phi}{2 R N \operatorname{sen} 1''}$$

$$D = \frac{\frac{3}{2} e^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \operatorname{sen} 1''}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi)^{3/2}}$$

$$E = \frac{1 + 3 \operatorname{tg}^2 \phi}{6 N^2}$$

EJEMPLO II

Calculemos el mismo ejemplo del método de Oudemans, aplicando las fórmulas para $K < 20$ kilómetros. Se tiene:

$$\begin{aligned}\phi &= -40^\circ 6' 50''.000 & a_n' &= 168^\circ 56' 23''.00 \\ L_1 &= -71^\circ 17' 16''.000 & K &= 19450.00 \text{ metros}\end{aligned}$$

Cálculo de la diferencia de latitud

$$-d\phi = K \cos a_n' B + K^2 \sin^2 a_n' C + h^2 D$$

$$h = K \cos a_n \phi' B \quad \phi' = \phi - d\phi$$

log $K = 4\ 288\ 9196$	log $K^2 = \bar{2}\ 5778$	log $h^2 = 5,583$
log $\cos a_n' = \bar{1}.991\ 8575_n$	log $\sin^2 a_n' = \bar{2}.5659$	log $D = 2,387$
log $B = \bar{2}\ 510\ 8431$	log $C = 1.3301$	<u>3.970</u>
log $h = 2.791\ 6202_n$	<u>2.4738</u>	3.º ter = +0.009''
$h = -618\ 899$	2.º ter = +0,030''	
2.º i 3.º ter = + 0,039	$-d\phi = -618.860'' = -$	$10' 18.860''$
$-d\phi = -618.860''$		$\phi = -40^\circ 6' 50.000''$
		<u>$\phi - d\phi = \phi' = -40^\circ 17' 8.860''$</u>

Cálculo del azimut

$$\begin{aligned}-da_n' &= dL \sin \phi_m \\ \log dL &= 2.19855 \\ \log \sin \phi_m &= \bar{1}.80987_n \\ \log (-da_n') &= 2.00842_n \\ -da_n' &= -101.95'' \\ -da_n' &= -1' 41''.95 \\ 180 + a_n' &= 34^\circ 56' 23''.00 \\ \hline a_n^2 &= 348^\circ 54' 41''.05\end{aligned}$$

Cálculo de la diferencia de longitud

$$dL = \frac{K \operatorname{sen} a_n' A_1}{\cos \phi'}$$

$$L_1 = L - dL$$

$$\begin{aligned} \log K &= 4.288 \ 9196 \\ \log \operatorname{sen} a_n' &= \bar{1}.282 \ 9427 \\ \log A_1 &= \bar{2}.509 \ 1111 \\ \log \sec \phi' &= 0.117 \ 5730 \\ \log dL &= 2.198 \ 5464 \\ &157''.959 \\ dL &= 0^\circ \ 2' \ 37''.959 \\ L &= 71^\circ \ 17' \ 16''.000 \\ L - dL = L_1 &= 71^\circ \ 14' \ 38''.041 \end{aligned}$$

RESÚMEN

$$\begin{aligned} \text{Cerro Chapelco: } \phi &= -40^\circ \ 17' \ 8''.860 \\ L &= 71^\circ \ 14' \ 38''.041 \end{aligned}$$

$$\text{Azimut sobre 315} = 348^\circ \ 54' \ 41''.05$$

De acuerdo con los valores obtenidos ya por el otro método.

El ejemplo anterior ha sido tratado como triangulación pequeña; calculemos ahora uno de triangulación primaria:

EJEMPLO III

En la estación 284 bis, Alto de Huahum, región del Lacar, i cuyas coordenadas son:

$$\phi = -40^\circ \ 6' \ 7''.000 \qquad L = 71^\circ \ 37' \ 44''.000$$

se tiene el azimut $190^\circ \ 28' \ 4''.00$ sobre el Volcan Tronador situado a la distancia de 119725,00 metros. Se desea calcular las coordenadas geográficas de este último punto i el azimut inverso.

Cálculo de la diferencia de latitud

$$-d\phi = K \cos a_n' B + K^2 \operatorname{sen}^2 a_n' C + (d\phi)^2 D - h K^2 \operatorname{sen}^2 a_n' E$$

$$h = K \cos a_n' B \qquad (d\phi)^2 = (d\phi \text{ con sólo } 1.^\circ \text{ i } 2.^\circ \text{ tér.})^2 \dots$$

$\log K=5.078\ 1848$	$\log K^2=0.15637$
$\log \cos a_n'=\bar{1}\ 992\ 7113_n$	$\log \operatorname{sen}^2 a_n'=\bar{2}.51862$
$\log B=\bar{2}.510\ 8440$	$\log C=\bar{1}.32989$
$\log h=3.581\ 7401_n$	$\log 2^\circ \text{ ter}=\bar{1}.98488$
$1.^{\text{er}} \text{ ter}=h=-3817.157$	$2^\circ \text{ ter}=+0''.966$
$2^\circ \text{ ter}=+0.966$	
$1^\circ \text{ i } 2^\circ \text{ ter}=-3816.191; \log: 3.58163$	$\log (d\phi)^2=\bar{3}.1633$
$3^\circ \text{ i } 4^\circ \text{ ter}=+0.378$	$\log D=\bar{2}.3866$
$-d\phi=-3815.815''$	$\log 3.^{\text{er}} \text{ ter}=\bar{1}.5499$
	$3.^{\text{er}} \text{ ter}=+0''.355$
$\log h=3\ 5817_n$	$4^\circ \text{ ter}=+0''.023$
$\log K^2 \operatorname{sen}^2 a_n'=\bar{2}\ 6750$	$\text{Suma}=+0''.378$
$\log E=\bar{4}\ 1064$	
$\log 4^\circ \text{ ter}=\bar{2}\ 3631_n$	
$-4^\circ \text{ ter}=+0''.023$	
$\phi=-40^\circ\ 6'\ 7''.000$	$-\frac{1}{2} d\phi=-0^\circ\ 31'\ 47''.9$
$-d\phi=-1^\circ\ 3'\ 35''.813$	$\phi_m=-40^\circ\ 37'\ 54''.9$
$\phi'=-41^\circ\ 9'\ 42''.813$	

Cálculo de la diferencia de longitud

$dL=\frac{K \operatorname{sen} a_n' A_1}{\cos \phi'}$	$L-dL=L_1$
$\log K=5\ 078\ 1848$	Cálculo del término
$\log \operatorname{sen} a_n'=\bar{1}.259\ 3132_n$	correctivo por diferencia
$\log A_1=\bar{2}.509\ 0889$	entre arco i seno:
$\log \sec \phi'=0.123\ 2899$	Argumento K: -254
$\log \text{aprox } dL=2.969\ 8768_n$	„ $dL: +15$
$\text{correccion}=-239$	Término correctivo=-239
$\log \text{corregido } dL=2\ 969\ 8529_n$	
$dL=-932.938''=-15'32''.938$	
$L=71^\circ 37'44'' 000$	
$L_1=71^\circ 53'16''.938$	

Cálculo del azimut

$$-d a_n' = dL \frac{\text{sen } \phi_m}{\cos \frac{1}{2} d\phi}$$

$$a_n^2 = a_n' + 180^\circ - d a_n'$$

$\log dL = 2.969853_n$	Término correctivo
$\log \text{sen } \phi_m = 1.813712_n$	$\log (dL)^3 = 2.909_n$
$\sec \frac{1}{2} d\phi = 5$	$\log F = 3.867$
$\log -d a_n' = 2.783570$	$\log \text{ter. correc} = 4.776_n$
$-d a_n' = +607''.33$	$\text{ter correc} = -0''.001$
$\text{corrección} = -0.00$	
$-d a_n' = +607''.33 = + 10' 7''.33$	
$180^\circ + a_n' = 10^\circ 28' 4''.00$	
$a_n^2 = 10^\circ 38' 11''.33$	

Se acostumbra tomar sólo el término correctivo del azimut $(dL)^3 F$ con $\log F$, de la tabla del Coast Survey, para valores grandes de dL .

RESÚMEN

Volcan Tronador: $\phi = -41^\circ 9' 42''.813$
 $L = 71^\circ 53' 16''.938$
 Azimut sobre Huahum = $10^\circ 38' 11''.33$

Veamos qué exactitud nos da el método de Oudemans en este ejemplo, aunque es especialmente desfavorable porque el lado calculado se encuentra aproximadamente de Norte a Sur i la mayor diferencia aparecerá en la latitud. En muchos cálculos es suficiente la precisión al décimo de segundo i es capaz de darla el método citado.

EJEMPLO IV

$\phi = -40^\circ 6' 7''.000$ $L = 71^\circ 37' 44''.000$
 $D = 119725.00 \text{ metros}$ $a_n' = 190^\circ 28' 4''.00$

Cálculo aproximado de ϕ'

$$d\phi = B_m D \cos a_n'$$

$$\phi' = \phi + d\phi$$

$$\log B_m = 2.51085$$

$$\log D = 5.07818$$

$$\log \cos a_n' = 1.99271_n$$

$$\log d\phi = 3.58174_n; d\phi = -3817''.2$$

$$d\phi = -1^\circ 3' 37''.2$$

$$\phi = -40^\circ 6' 7''.0$$

$$\phi' \text{ aprox} = -41^\circ 9' 44''.2$$

Cálculo del azimut

$$\log a = dL \sin \phi_m + \frac{3}{4} f(d\phi) + \frac{1}{2} f(dL)$$

$$\phi_m = -40^\circ 37' 55''.6$$

$$\log dL = 2.9698544_n$$

$$\log \sin \phi_m = 1.8137142_n$$

$$\frac{3}{4} f(d\phi) = 186$$

$$\frac{1}{2} f(dL) = 7$$

$$\log a = 2.7835879$$

$$a = +607''.56$$

$$a = +0^\circ 10' 7''.56$$

$$180^\circ + a_n' = 10^\circ 28' 4''.00$$

$$a_n^2 = 10^\circ 38' 11''.56$$

$$a_{nm} = 190^\circ 33' 7''.78$$

Cálculo de la diferencia de longitud

$$\log dL = \log A_1 D \sin a_n' \sec \phi - f(d\phi)$$

$$L_1 = L - dL$$

$$\log A_1 = 2.5090889$$

$$\log D = 5.0781848 \text{ Corr. por var. } \phi'$$

$$\log \sin a_n' = 1.2593132_n$$

$$\log \sec \phi' = 0.1232924$$

$$-f(d\phi) = -248$$

$$\log dL = 2.9698544_n$$

$$\text{Val prov. } dL = -932''.94 \quad 2.9698518_n: -932''.936$$

$$-dL \text{ corregido} = +0^\circ 15' 32''.936$$

$$L = 71^\circ 37' 44''.000$$

$$L_1 = 71^\circ 53' 16''.936$$

Cálculo de $f(d\phi)$

$$\log \sec d\phi = 0.0000744$$

$$\frac{1}{3} \log \sec d\phi = 248$$

$$-f(d\phi) = -248$$

Cálculo de la diferencia de latitud

RESÚMEN

$$\log d\phi = \log B_m D \cos a_{nm} + \frac{1}{2} f(dL)$$

$$\phi' = \phi + d\phi$$

$$\log B_m = 2.5108036$$

$$\log D = 5.0781848$$

$$\log \cos a_{nm} = 1.9925927_n$$

$$\frac{1}{2} f(dL) = 7$$

$$\log d\phi = 3.5815718_n$$

$$d\phi = -3815''.761$$

$$d\phi = -1^\circ 3' 35''.761$$

$$\phi = -40^\circ 6' 7''.000$$

$$\phi' = -41^\circ 9' 42''.761$$

Puissant

$$\phi = -41^\circ 9' 42''.813$$

$$L = 71^\circ 53' 16''.938$$

$$a_n^2 = 10^\circ 38' 11''.33$$

Oudemans

$$42''.761$$

$$16''.936$$

$$11''.56$$

Para la aplicación del método de Puissant al caso de muy largas distancias M. H. Doolittle ha desarrollado el cuarto coeficiente diferencial, espuesto el método brevemente como sigue:

Aplicando la serie de Taylor en la forma indicada, se tiene:

$$\frac{1}{24} \frac{d^4 \lambda}{dl^4} l^4 = -\frac{1}{24} l^4 \sin^2 x \cot \lambda [(1-3 \cos^2 x) (1+3 \cot^2 \lambda) - 6 \cos^2 x \operatorname{cosec} \lambda]$$

Reemplazando $\lambda = 90^\circ - \phi$; $a_n' = 180^\circ - x$

$\frac{K}{N} = l$ i multiplicando por $\frac{N}{R \sin 1''}$ i del mismo modo como se ha hecho con los otros coeficientes, se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{24} \frac{d^4 \lambda}{dl^4} l^4 = & -\frac{1}{24} \frac{K^4}{RN^3 \sin 1''} \sin^2 a_n' \operatorname{tg} \phi (1+3 \operatorname{tg}^2 \phi) \\ & + \frac{1}{8} \frac{K^4}{RN^3 \sin 1''} \sin^2 a_n' \cos^2 a_n' \operatorname{tg} \phi (1+3 \operatorname{tg}^2 \phi) \\ & + \frac{1}{4} \frac{K^4}{RN^3 \sin 1''} \sin^2 a_n' \cos^2 a_n' \operatorname{tg} \phi \sec^2 \phi \end{aligned}$$

En la fórmula encontrada para la diferencia de latitud:

$$-d\phi = K \cos a_n' B + K^2 \sin^2 a_n' C - h K^2 \sin^2 a_n' E + \dots$$

haremos $K^2 \sin^2 a_n' C = C_1$ i se podrá escribir:

$$C_1 E = \frac{K^2 \sin^2 a_n' \operatorname{tg} \phi (1+3 \operatorname{tg}^2 \phi)}{12 RN^3 \sin 1''}$$

$$A^2 C_1 = \frac{K^2 \sin^2 a_n' \operatorname{tg} \phi}{2 RN^3 \sin^3 1''}$$

en función de los coeficientes tabulados, de modo que la fórmula final es:

$$\begin{aligned} -d\phi = & K \cos a_n' B + K^2 \sin^2 a_n' C + (d\phi)^2 D - h K^2 \sin^2 a_n' E \\ & - \frac{1}{2} K^2 C_1 E + \frac{3}{2} K^2 \cos^2 a_n' C_1 E + \frac{1}{2} K^2 \cos^2 a_n' \sec^2 \phi A^2 C_1 \sin^2 1'' \end{aligned}$$

Para $K=230$ kilómetros la parte que sigue al término $-h K^2 \sin^2 a_n' E$, que es la diferencia con la fórmula desarrollada primeramente, alcanza a $0''.038$.

En las grandes triangulaciones de Estados Unidos ha habido que hacer uso de esta fórmula, pues se han presentado en California, Nevada, Utah i Colorado, lados de 2 grados i aun $2\frac{3}{4}$ grados.

Existen fórmulas aplicables aun a las mayores distancias medibles, como las indicadas por Clarke (*Geodesy*—Oxford—1880, o la traduccion al español de Eduardo Leon i Ortiz—Madrid—1895). Para el caso de largas distancias, con términos de quinto orden, consúltese Helmert tomo I, páj. 296; pero se requiere el uso a lo ménos de nueve decimales logarítmicas.

En el método de Puissant, despreciando la correccion por diferencia de arco i seno i los términos $\frac{1}{\cos \frac{1}{2} d\phi}$ i $(dL)^3 F$, se obtiene, hasta 160 kilómetros de distancia, una aproximacion tal que asegura el décimo de segundo.

Apliquemos ahora el método de Puissant a dos problemas que tienen especial interes en nuestro pais, especialmente en los estudios hidrográficos.

I.—Dadas las coordenadas ϕ , L , ϕ' i L' de dos puntos, determinar su distancia i azimutes.

Podemos resolver este problema tratando a la inversa las fórmulas encontradas. Se presenta el caso con menor frecuencia que el espuesto; será necesario emplearlo cuando los dos puntos se encuentran en distintas hojas de la carta o si la lectura sobre ella no permite la precision que se desea.

Cuando se ejecuta el cálculo de la distancia entre dos puntos, partiendo de las latitudes i diferencia de lonjitudes observadas, se trata jeneralmente de grandes distancias, haciéndose uso de fórmulas especiales en que interviene la latitud reducida, midiéndose sólo en Hidrografia distancias menores por este sistema. Dado que las coordenadas observadas no tienen la precision jeodésica, bastará el uso de fórmulas sencillas, puesto que para grandes distancias el cálculo dentro de esa precision exige la introduccion de términos de orden superior que compliquen las fórmulas.

Hemos encontrado para las diferencias de latitud i lonjitud las fórmulas siguientes:

$$-d\phi = K \cos a_n' B + K^2 \sin^2 a_n' C + (d\phi)^2 D - hK^2 \sin^2 a_n' E + \dots$$

$$dL = \frac{K \sin a_n' A_1}{\cos \phi'}$$

Si hacemos

$$K \cos a_n' = X \quad \text{i} \quad K \sin a_n' = Y$$

podemos escribir con $-\frac{1}{B}$ como factor comun:

$$X = -\frac{1}{B} [d\phi + CY^2 + D(d\phi)^2 - E(d\phi) Y^2]$$

$$Y = \frac{dL \cos \phi'}{A_1}$$

Pudiéndose calcular $tj a_n'$ por la expresión:

$$tj a_n' = \frac{K \operatorname{sen} a_n'}{K \cos a_n'} = \frac{Y}{X}$$

i por tanto:

$$K = \frac{X}{\cos a_n'} = X \sec a_n'$$

o bien

$$K = \frac{Y}{\operatorname{sen} a_n'} = Y \operatorname{cosec} a_n'$$

Segun sea el valor de a_n' , elejiremos la primera o segunda expresión; si $\operatorname{sen} a_n' > \cos a_n'$ es preferible la segunda.

Calculemos a la inversa uno de los ejemplos ya tratados.

EJEMPLO V

Se nos dan las siguientes coordenadas:

Estacion 315: $\phi = -40^\circ 6' 50''.000$ Cerro Chapelco: $\phi = -40^\circ 17' 8''.860$

$L = 71^\circ 17' 16''.000$ $L = 71^\circ 14' 38''.041$

tratándose de calcular la distancia K de ambos puntos i los azimutes a_n' i a_n'' .

Tenemos: $d\phi = +0^\circ 10' 618''.860$; $dL = +0^\circ 2' 37''.959$

i en segundos: $d\phi = +618''.860$; $dL = +157''.959$

$$\text{Cálculo de } Y = \frac{dL \cos \phi'}{A_1}$$

$$\log dL = 2.198 \ 5464$$

$$\log \cos \phi' = \bar{1} \ 882 \ 4270$$

$$\log \text{numerador} = 2.080 \ 9734$$

$$\log A_1 = 2.509 \ 1111$$

$$\log Y = 3.571 \ 8623$$

$$\log Y^2 = \bar{3}.14372$$

En el caso presente tomaremos en cuenta el término en E , que despreciamos en el cálculo de las coordenadas.

$$\text{Cálculo de } X = -\frac{1}{B} [d\phi + CY^2 + D(d\phi)^2 - E(d\phi)Y^2]$$

$$d\phi = +618''.860 \quad \log C = 1.3301 \quad \log D = 2.387 \quad \log E = \bar{3}.107$$

$$CY^2 = +0.030 \quad \log Y^2 = \bar{3}.1437 \quad \log (d\phi)^2 = 5.583 \quad \log d\phi = 2.791$$

$$D(d\phi)^2 = +0.009 \quad \log CY^2 = 2.4738 \quad \log D(d\phi)^2 = \bar{3}.970 \quad \log Y^2 = \bar{3}.144$$

$$-E(d\phi)Y^2 = -0.001 \quad CY^2 = +0''.030 \quad D(d\phi)^2 = +0''.009 \quad \log E(d\phi)Y^2 = \bar{3}.042$$

$$\text{Suma} = +618''.898$$

$$-E(d\phi)Y^2 = -0''.001$$

$$\log B = 2.5108431; \log \frac{1}{B} = 1.4891569_n$$

$$\log [d\phi + CY^2 + D(d\phi)^2 - E(d\phi)Y^2] = 2.7916191$$

$$\log X = 4.2807760_n$$

$$\text{Cálculo de } \tan a_n' = \frac{Y}{X}$$

$$\log Y = 3.5718623$$

$$\log X = 4.2807760_n$$

$$\log \tan a_n' = 1.2910863_n$$

$$a_n' = -11^\circ 3' 37''.09$$

$$a_n' = 168^\circ 56' 22''.91$$

$$\text{Cálculo de } K = \frac{X}{\cos a_n'}$$

$$\log X = 4.2807760_n$$

$$\log \cos a_n' = 1.9918575_n$$

$$\log K = 4.2889185$$

$$K = 19449.95 \text{ mts.}$$

Cálculo del azimut inverso

$$\text{Converjencia: } -da_n' = dL \sin \phi_m; \phi_m = -40^\circ 11' 59''$$

$$\log dL = 2.19855$$

$$\log \sin \phi_m = 1.80986_n$$

$$\log -da_n' = 2.00041_n$$

$$-da_n' = -101''.95$$

$$-da_n' = -0^\circ 1' 41''.95$$

$$180^\circ + a_n' = 348^\circ 56' 22''.91$$

$$a_n'' = 348^\circ 54' 40''.96$$

RESÚMEN

$$K = 19449.95 \text{ mts}$$

$$a_n' = 168^\circ 56' 22''.91$$

$$a_n'' = 348^\circ 54' 40''.96$$

En el caso de distancias muy largas, habrá que hacer intervenir la corrección por diferencia de arco i línea, i para tomarlas de la tabla es necesario calcular valores aproximados de los argumentos.

II. Dada la latitud ϕ de un punto i el azimut a_n' , sobre otro de coordenadas conocidas ϕ' i L' , determinar la distancia, diferencia de longitud i azimut inverso.

El problema no tiene solución cuando el azimut es 90° o 270° i los resultados son tanto mas exactos mientras mas se acerque a 0° i 180° ; en la práctica la solución tiene especial interés por la diferencia de longitud.

Para resolver la cuestion podemos calcular un valor aproximado de K , haciendo en la fórmula de la latitud

$$-d\phi = K \cos a_n' B$$

valor que, llevado a $Y = K \sin a_n'$, nos permite resolver la espresion encontrada

$$X = -\frac{1}{B} [d\phi + CY^2 + D(d\phi)^2 - E(d\phi) Y^2]$$

Con el logaritmo de X por medio de

$$K = \frac{X}{\cos a_n'}$$

determinamos un valor definitivo para K , que llevado a su vez a la espresion

$$dL = \frac{K \sin a_n' A_1}{\cos \phi'}$$

nos da la diferencia de lonjitud, elementos que nos permiten determinar la converjencia i calcular el azimut inverso.

En la práctica, para obtener buen resultado convendrá elejir un punto de coordenadas conocidas que esté situado al Norte o Sur del punto de estacion, o lo mas próximo posible a esas direcciones. Este método se usa especialmente con ventaja en los viajes de esploracion i trabajos hidrográficos i en esos casos los cálculos no se ejecutan con tanta prolijidad, pues se parte de elementos observados con pequeños instrumentos. En el levantamiento del pais, ejecutado por Pissis, se determinó la lonjitud de Valdivia, por azimut al volcan Llaimas, relacionado a la triangulacion del valle central, i de ese modo fué posible unir ambos trabajos separados por la rejion boscosa de la Araucanía.

EJEMPLO VI

Conocida la latitud $\phi = -40^\circ 3' 7''.0$ del cerro Loló i el azimut $a_n' = 337^\circ 39' 14''.0$ sobre el Volcan Lanin, cuyas coordenadas son: $\phi' = -39^\circ 38' 14''.0$ i $L' = 71^\circ 30' 10''.0$ Oeste de Greenwich, calcular la lonjitud i el azimut inverso del primer punto, así como la distancia de ambos.

En el presente ejemplo despreciamos la correccion por diferencia de línea i arco.

$$\begin{aligned} \phi &= -40^\circ 3' 7''.0 \\ \phi' &= -39^\circ 38' 14''.0 \\ \hline d\phi &= -0^\circ 24' 53''.0 = -1493'' \\ a_n' &= 337^\circ 39' 14''.0 \end{aligned}$$

Cálculo aproximado de K

$$-d\phi = K \cos a_n' B$$

de donde:

$$K = \frac{-d\phi}{\cos a_n' B}$$

$\log -d\phi = 3.17406$	$\log A_1 = 2.509\ 1277$
$\log \sec a_n' = 0.03391$	$\log B = \bar{2}.510\ 8479$
$\log \frac{1}{B} = 1.48915$	$\log C = 1.32912$
$\log K = 4.69712$	$\log D = 2.3864$
$K = 49787$ aprox.	$\log E = \bar{4}.1054$

Cálculo aproximado de $Y = K \sin a_n'$

$$\begin{aligned} \log K &= 4.69712 \\ \log \sin a_n' &= \bar{1}.58001_n \\ \log Y &= 4.27713_n \\ \log Y^2 &= \bar{2}.55426 \end{aligned}$$

$$\text{Cálculo de } X = -\frac{1}{B} [d\phi + CY^2 + D(d\phi)^2 - E(d\phi) Y^2]$$

$d\phi = -1493''.00$	$\log C = 1.32912$	$\log D = 2.3864$
$CY^2 = +\ 0.76$	$\log Y^2 = \bar{2}.55426$	$\log (d\phi)^2 = \bar{4}.3481$
$D(d\phi)^2 = +\ 0.05$	$\log CY^2 = \bar{1}.88338$	$\log D(d\phi)^2 = \bar{2}.7345$
$-E(d\phi) Y^2 = +\ 0.01$	$CY^2 = +0''.76$	$D(d\phi)^2 = +0''.05$
Valor de $[-] = -1492''.18$		

$\log E = \bar{4}.1054$	$\log -\frac{1}{B} = 1.489\ 1521_n$
$\log (d\phi) = 3\ 1741_n$	
$\log Y^2 = \bar{2}.5543$	$\log [-] = 3.173\ 8212_n$
$\log E(d\phi) Y^2 = \bar{3}.8338_n$	$\log X = 4.662\ 9733$
$-E(d\phi) Y^2 = +0''.01$	

$$\text{Cálculo definitivo de } K = \frac{X}{\cos a_n'}$$

$$\begin{aligned} \log X &= 4.662\ 9733 \\ \log \cos a_n' &= \bar{1}.996\ 0967 \\ \log K &= 4.696\ 8766 \\ K &= 49759.6 \text{ metros.} \end{aligned}$$

$$\text{Cálculo de } dL = \frac{K \operatorname{sen} a_n' A_1}{\cos \phi'}$$

$$\begin{array}{rcl} \log K & = & 4.696 \ 8766 \\ \log \operatorname{sen} a_n' & = & \bar{1}.580 \ 0128_n \\ \log A_1 & = & 2.509 \ 1277 \\ \log \sec \phi' & = & 0.113 \ 4535 \\ \hline \log dL & = & 2.899 \ 4706_n \\ dL & = & -793''.4 = -0^\circ 13' 13''.4 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} L' & = & 71^\circ 30' 10''.0 \\ dL & = & -0^\circ 13' 13''.4 \\ \hline L & = & 71^\circ 16' 56''.6 \end{array}$$

Cálculo del azimuth inverso

$$\text{Converjencia:} \quad -da_n' = dL \frac{\operatorname{sen} \phi_m}{\cos \frac{1}{2} d\phi}$$

$$\begin{array}{rcl} \phi & = & -40^\circ \ 3' \ 7''.0 \\ \phi' & = & -39^\circ \ 38' \ 14''.0 \\ \phi_m & = & -39^\circ \ 50' \ 40''.5 \\ \frac{1}{2} d\phi & = & -0^\circ \ 12' \ 26''.5 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \log dL & = & 2.899 \ 4706_n \\ \log \operatorname{sen} \phi_m & = & \bar{1}.806 \ 6596_n \\ \log \sec \frac{1}{2} d\phi & = & 0.000 \ 0026 \\ \hline \log -da_n' & = & 2.706 \ 1328 \\ -da_n' & = & 508''.32 = 0^\circ \ 8' \ 28''.32 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} a_n' & = & 337^\circ \ 39' \ 14''.0 \\ & & 180^\circ \\ & & 157^\circ \ 39' \ 14''.0 \\ -da_n' & = & + \quad \quad \quad 8' \ 28''.3 \\ \hline a_n^2 & = & 157^\circ \ 47' \ 42''.3 \end{array}$$

RESÚMEN

$$\begin{array}{rcl} \text{Cerro Loló: } \phi & = & -40^\circ \ 3' \ 7''.0 \\ & & L = 71^\circ \ 16' \ 56''.6 \\ \text{Distancia Loló—Ianin: } K & = & 49759 \ 6 \text{ metros} \\ \text{Azimut Loló—Ianin: } a_n' & = & 337^\circ \ 39' \ 14''.0 \\ \text{„ Ianin—Loló: } a_n^2 & = & 157^\circ \ 47' \ 42''.3 \end{array}$$

Hemos hecho notar, al tratar el problema anterior, que la orientación cercana a la línea Este-Oeste le era desfavorable; en este caso se puede obtener la diferencia de longitud si los dos puntos son accesibles i visibles, por la observación de latitudes i azimutes.

En efecto, siendo ϕ i ϕ' las latitudes, a_n' i a_n^2 los azimutes, como anteriormente, llevados a la fórmula de la converjencia:

$$-da_n' = dL \frac{\operatorname{sen} \phi_m}{\cos \frac{1}{2} d\phi}$$

nos da

$$a_n^2 - 180^\circ - a_n' = dL \operatorname{sen} \frac{\phi + \phi'}{2} \operatorname{sec} \frac{\phi - \phi'}{2}$$

o bien

$$dL = a_n^2 - (180^\circ + a_n') \operatorname{cosec} \frac{\phi + \phi'}{2} \cos \frac{\phi - \phi'}{2}$$

Para una distancia dada, el valor $a_n^2 - (180^\circ + a_n')$ será máximo con los azimutes 90° i 270° i el método es aplicable a cualquier azimut. A la latitud de 45° tenemos $\operatorname{cosec} \phi = 1.41$, luego:

$$1'' \text{ converjencia} \times 1.41 = 1''.41 \text{ dif. de lonjitud.}$$

La dificultad en la práctica está en que la determinacion de azimutes dentro de la precision exigida es una operacion delicada; sin embargo, se ha hecho indicacion de emplear el método en las Islas Aleussianas

Con lo espuesto, creemos haber dejado de manifiesto la importancia i poca dificultad del cálculo de las coordenadas jeográficas, i ojalá los ingenieros i marinos que se ocupan de esta clase de trabajos los ejecutaran siempre en las triangulaciones delicadas, contribuyendo así a la mejora de nuestra cartografía que, hasta hace pocos años, autorizaba suficientemente para que alguno de nuestros gobernantes se hubiese espresado en forma semejante a la conocida frase de Luis XIV, al presentársele una Carta de Francia: "Los señores de la Academia me han hecho perder mas territorio que una guerra funesta."

ERNESTO GREVE.

Santiago, Marzo de 1901.

TABLA I

(J. A. C. Oudemans.—*Die Triangulation von Java.—Das primaere Dreiecknetz.*
—Haag, 1895)

x	f (x)	x	f (x)
0'	0.0	1700''	49.2
100	0.2	1800	55.1
200	0.7	1900	61.4
300	1.5	2000	68.1
400	2.7	2100	75.0
500	4.3	2200	82.3
600	6.1	2300	90.0
700	8.3	2400	98.0
800	10.9	2500	106.3
900	13.8	2600	115.0
1000	17.0	2700	124.0
1100	20.6	2800	133.4
1200	24.5	2900	143.1
1300	28.8	3000	153.1
1400	33.3	3100	163.4
1500	38.3	3200	174.0
1600	43.6	3300	184.9
1700	49.2	3400	196.1

TABLA II

(COAST AND GEODETIC SURVEY.—REPORT 1894.—APP. N.º 9)

Elipsoide de Clarke 1866

LAT. ϕ	LOG A	LOG B	LOG C	LOG D	LOG E	LOG F
18° 0'	8.509 5862	8.512 2550	0.91816	2.1606	5.7317	7.738
10	8.509 5836	8.512 2474	0.92243	2.1641	5.7337	
20	8.509 5811	8.512 2397	0.92667	2.1675	5.7358	7.744
30	8.509 5785	8.512 2320	0.93088	2.1709	5.7379	
40	8.509 5759	8.512 2243	0.93505	2.1742	5.7400	7.750
50	8.509 5733	8.512 2165	0.93919	2.1775	5.7422	
19° 0'	8.509 5707	8.512 2086	0.94330	2.1808	5.7443	7.756
10	8.509 5681	8.512 2006	0.94737	2.1840	5.7464	
20	8.509 5654	8.512 1927	0.95142	2.1872	5.7486	7.761
30	8.509 5627	8.512 1847	0.95544	2.1903	5.7508	
40	8.509 5600	8.512 1766	0.95943	2.1934	5.7530	7.767
50	8.509 5573	8.512 1684	0.96339	2.1965	5.7552	
20° 0'	8.509 5546	8.512 1602	0.96733	2.1996	5.7574	7.772
10	8.509 5518	8.512 1519	0.97123	2.2026	5.7597	
20	8.509 5490	8.512 1435	0.97511	2.2055	5.7619	7.777
30	8.509 5462	8.512 1351	0.97896	2.2084	5.7642	
40	8.509 5434	8.512 1267	0.98279	2.2113	5.7664	7.782
50	8.509 5406	8.512 1182	0.98659	2.2142	5.7688	
21° 0'	8.509 5377	8.512 1096	0.99037	2.2170	5.7711	7.787
10	8.509 5348	8.512 1010	0.99412	2.2198	5.7734	
20	8.509 5320	8.512 0924	0.99785	2.2226	5.7757	7.791
30	8.509 5290	8.512 0836	1.00156	2.2253	5.7780	
40	8.509 5261	8.512 0748	1.00524	2.2280	5.7804	7.796
50	8.509 5232	8.512 0660	1.00890	2.2307	5.7828	
22° 0'	8.509 5202	8.512 0571	1.01253	2.2333	5.7851	7.800
10	8.509 5172	8.512 0481	1.01615	2.2359	5.7875	
20	8.509 5142	8.512 0391	1.01974	2.2385	5.7899	7.804
30	8.509 5112	8.512 0301	1.02331	2.2411	5.7924	
40	8.509 5082	8.512 0210	1.02686	2.2436	5.7948	7.808
50	8.509 5051	8.512 0118	1.03039	2.2461	5.7972	
23° 0'	8.509 5020	8.512 0026	1.03390	2.2485	5.7997	7.812
10	8.509 4990	8.511 9934	1.03739	2.2510	5.8021	
20	8.509 4959	8.511 9840	1.04086	2.2534	5.8046	7.816
30	8.509 4927	8.511 9747	1.04431	2.2557	5.8071	
40	8.509 4896	8.511 9653	1.04775	2.2581	5.8096	7.819
50	8.509 4865	8.511 9558	1.05116	2.2604	5.8121	
24° 0'	8.509 4833	8.511 9463	1.05456	2.2627	5.8146	7.823
10	8.509 4801	8.511 9367	1.05794	2.2650	5.8172	
20	8.509 4769	8.511 9271	1.06130	2.2672	5.8197	7.826
30	8.509 4737	8.511 9174	1.06464	2.2694	5.8223	
40	8.509 4704	8.511 9077	1.06797	2.2716	5.8249	7.829
50	8.509 4672	8.511 8979	1.07128	2.2738	5.8274	
25° 0'	8.509 4639	8.511 8881	1.07457	2.2759	5.8300	7.832
10	8.509 4606	8.511 8783	1.07785	2.2780	5.8326	
20	8.509 4573	8.511 8684	1.08111	2.2801	5.8352	7.835
30	8.509 4540	8.511 8584	1.08435	2.2822	5.8379	
40	8.509 4507	8.511 8484	1.08758	2.2842	5.8405	7.838
50	8.509 4473	8.511 8383	1.09080	2.2862	5.8431	
60	8.509 4439	8.511 8283	1.09400	2.2882	5.8458	7.841

LAT ϕ	LOG A	LOG B	LOG C	LOG D	LOG E	LOG F
26° 0'	8.509 4439	8.511 8283	1.09400	2.2882	5.8458	7.841
10	8.509 4406	8.511 8131	1.09718	2.2902	5.8485	
20	8.509 4372	8.511 8079	1.10036	2.2922	5.8512	7.844
30	8.509 4337	8.511 7977	1.10351	2.2941	5.8539	
40	8.509 4303	8.511 7874	1.10666	2.2960	5.8566	7.846
50	8.509 4269	8.511 7771	1.10979	2.2978	5.8593	
27° 0'	8.509 4234	8.511 7667	1.11290	2.2997	5.8620	7.849
10	8.509 4200	8.511 7563	1.11600	2.3015	5.8647	
20	8.509 4165	8.511 7458	1.11909	2.3033	5.8675	7.851
30	8.509 4130	8.511 7353	1.12217	2.3051	5.8702	
40	8.509 4094	8.511 7248	1.12523	2.3069	5.8730	7.853
50	8.509 4059	8.511 7142	1.12829	2.3086	5.8757	
28° 0'	8.509 4024	8.511 7036	1.13132	2.3104	5.8785	7.855
10	8.509 3988	8.511 6929	1.13435	2.3121	5.8813	
20	8.509 3952	8.511 6822	1.13737	2.3137	5.8841	7.857
30	8.509 3917	8.511 6714	1.14037	2.3154	5.8870	
40	8.509 3881	8.511 6607	1.14337	2.3170	5.8898	7.859
50	8.509 3845	8.511 6498	1.14635	2.3187	5.8926	
29° 0'	8.509 3808	8.511 6389	1.14932	2.3203	5.8955	7.861
10	8.509 3772	8.511 6280	1.15228	2.3218	5.8983	
20	8.509 3735	8.511 6171	1.15522	2.3234	5.9012	7.863
30	8.509 3699	8.511 6061	1.15816	2.3249	5.9041	
40	8.509 3662	8.511 5950	1.16109	2.3264	5.9069	7.864
50	8.509 3625	8.511 5840	1.16401	2.3279	5.9098	
30° 0'	8.509 3588	8.511 5729	1.16692	2.3294	5.9127	7.866
10	8.509 3551	8.511 5617	1.16981	2.3309	5.9157	
20	8.509 3514	8.511 5505	1.17270	2.3323	5.9186	7.867
30	8.509 3476	8.511 5393	1.17558	2.3337	5.9215	
40	8.509 3439	8.511 5281	1.17845	2.3351	5.9245	7.869
50	8.509 3401	8.511 5168	1.18131	2.3365	5.9274	
31° 0'	8.509 3363	8.511 5054	1.18416	2.3379	5.9304	7.870
10	8.509 3325	8.511 4941	1.18700	2.3392	5.9334	
20	8.509 3287	8.511 4827	1.18983	2.3405	5.9363	7.871
30	8.509 3249	8.511 4713	1.19266	2.3418	5.9393	
40	8.509 3211	8.511 4598	1.19548	2.3431	5.9423	7.872
50	8.509 3173	8.511 4483	1.19828	2.3444	5.9453	
32° 0'	8.509 3134	8.511 4368	1.20108	2.3456	5.9484	7.873
10	8.509 3096	8.511 4252	1.20387	2.3469	5.9514	
20	8.509 3057	8.511 4136	1.20666	2.3481	5.9544	7.874
30	8.509 3018	8.511 4020	1.20944	2.3493	5.9575	
40	8.509 2980	8.511 3903	1.21220	2.3504	5.9605	7.875
50	8.509 2940	8.511 3786	1.21496	2.3516	5.9636	
33° 0'	8.509 2901	8.511 3669	1.21772	2.3527	5.9667	7.875
10	8.509 2862	8.511 3551	1.22047	2.3539	5.9698	
20	8.509 2823	8.511 3433	1.22321	2.3550	5.9729	7.876
30	8.509 2784	8.511 3315	1.22594	2.3561	5.9760	
40	8.509 2744	8.511 3197	1.22866	2.3571	5.9791	7.876
50	8.509 2704	8.511 3078	1.23138	2.3582	5.9822	
34° 0'	8.509 2665	8.511 2959	1.23409	2.3592	5.9853	7.877
10	8.509 2625	8.511 2840	1.23680	2.3602	5.9885	
20	8.509 2585	8.511 2720	1.23950	2.3612	5.9916	7.877
30	8.509 2545	8.511 2600	1.24219	2.3622	5.9948	
40	8.509 2505	8.511 2480	1.24488	2.3632	5.9980	7.877
50	8.509 2465	8.511 2360	1.24756	2.3642	6.0011	
60	8.509 2425	8.511 2239	1.25024	2.3651	6.0043	7.877

LAT. ϕ	LOG A	LOG B.	LOG C	LOG D	LOG E	LOG F
35° 0'	8.509 2425	8.511 2239	1.25024	2.3651	6.0043	7.877
10	8.509 2384	8.511 2118	1.25291	2.3660	6.0075	
20	8.509 2344	8.511 1997	1.25557	2.3669	6.0107	7.877
30	8.509 2304	8.511 1875	1.25823	2.3678	6.0140	
40	8.509 2263	8.511 1754	1.26088	2.3687	6.0172	7.877
50	8.509 2222	8.511 1632	1.26353	2.3695	6.0204	
36° 0'	8.509 2182	8.511 1510	1.26617	2.3704	6.0237	7.877
10	8.509 2141	8.511 1387	1.26881	2.3712	6.0269	
20	8.509 2100	8.511 1265	1.27145	2.3720	6.0302	7.877
30	8.509 2059	8.511 1142	1.27407	2.3728	6.0334	
40	8.509 2018	8.511 1019	1.27670	2.3735	6.0367	7.877
50	8.509 1977	8.511 0895	1.27932	2.3743	6.0400	
37° 0'	8.509 1936	8.511 0772	1.28193	2.3750	6.0438	7.876
10	8.509 1895	8.511 0648	1.28454	2.3758	6.0466	
20	8.509 1853	8.511 0524	1.28715	2.3765	6.0499	7.876
30	8.509 1812	8.511 0400	1.28975	2.3772	6.0533	
40	8.509 1771	8.511 0276	1.29234	2.3779	6.0566	7.875
50	8.509 1729	8.511 0151	1.29494	2.3785	6.0600	
38° 0'	8.509 1687	8.511 0027	1.29753	2.3792	6.0633	7.874
10	8.509 1646	8.510 9902	1.30011	2.3798	6.0667	
20	8.509 1604	8.510 9777	1.30269	2.3804	6.0701	7.874
30	8.509 1562	8.510 9652	1.30527	2.3810	6.0734	
40	8.509 1521	8.510 9526	1.30785	2.3816	6.0768	7.873
50	8.509 1479	8.510 9401	1.31042	2.3822	6.0802	
39° 0'	8.509 1437	8.510 9275	1.31299	2.3827	6.0836	7.872
10	8.509 1395	8.510 9149	1.31555	2.3832	6.0871	
20	8.509 1353	8.510 9023	1.31811	2.3838	6.0905	7.871
30	8.509 1311	8.510 8897	1.32067	2.3843	6.0939	
40	8.509 1269	8.510 8771	1.32323	2.3848	6.0974	7.870
50	8.509 1227	8.510 8644	1.32578	2.3852	6.1008	
40° 0'	8.509 1184	8.510 8517	1.32833	2.3857	6.1043	7.869
10	8.509 1142	8.510 8391	1.33088	2.3861	6.1078	
20	8.509 1100	8.510 8264	1.33342	2.3866	6.1113	7.867
30	8.509 1057	8.510 8137	1.33596	2.3870	6.1148	
40	8.509 1015	8.510 8010	1.33850	2.3874	6.1183	7.866
50	8.509 0973	8.510 7883	1.34104	2.3878	6.1218	
41° 0'	8.509 0930	8.510 7755	1.34358	2.3882	6.1253	7.864
10	8.509 0888	8.510 7628	1.34611	2.3885	6.1289	
20	8.509 0845	8.510 7500	1.34864	2.3889	6.1324	7.863
30	8.509 0803	8.510 7373	1.35117	2.3892	6.1360	
40	8.509 0760	8.510 7245	1.35370	2.3895	6.1395	7.861
50	8.509 0718	8.510 7117	1.35623	2.3898	6.1431	
42° 0'	8.509 0675	8.510 6989	1.35875	2.3901	6.1467	7.860
10	8.509 0632	8.510 6861	1.36127	2.3903	6.1503	
20	8.509 0590	8.510 6733	1.36379	2.3906	6.1539	7.858
30	8.509 0547	8.510 6605	1.36631	2.3908	6.1575	
40	8.509 0504	8.510 6477	1.36883	2.3910	6.1612	7.856
50	8.509 0461	8.510 6348	1.37135	2.3913	6.1648	
43° 0'	8.509 0419	8.510 6220	1.37386	2.3914	6.1684	7.854
10	8.509 0376	8.510 6092	1.37638	2.3916	6.1721	
20	8.509 0333	8.510 5963	1.37889	2.3918	6.1758	7.852
30	8.509 0290	8.510 5835	1.38141	2.3919	6.1795	
40	8.509 0247	8.510 5706	1.38392	2.3921	6.1831	7.850
50	8.509 0204	8.510 5578	1.38643	2.3922	6.1868	
60	8.509 0162	8.510 5449	1.38894	2.3923	6.1905	7.848

LAT. ϕ	LOG A	LOG B	LOG C	LOG D	LOG E	LOG F
44° 0'	8.509 0162	8.510 5449	1.38894	2.3923	6.1905	7.848
10	8.509 0119	8.510 5320	1.39145	2.3924	6.1943	
20	8.509 0076	8.510 5192	1.39396	2.3925	6.1980	7.845
30	8.509 0033	8.510 5063	1.39648	2.3925	6.2017	
40	8.508 9990	8.510 4935	1.39898	2.3926	6.2055	7.843
50	8.508 9947	8.510 4806	1.40149	2.3926	6.2092	
45° 0'	8.508 9904	8.510 4677	1.40400	2.3926	6.2130	7.840
10	8.508 9861	8.510 4548	1.40651	2.3926	6.2168	
20	8.508 9818	8.510 4420	1.40902	2.3926	6.2206	7.838
30	8.508 9776	8.510 4291	1.41153	2.3926	6.2244	
40	8.508 9733	8.510 4162	1.41404	2.3925	6.2283	7.835
50	8.508 9689	8.510 4034	1.41655	2.3925	6.2321	
46° 0'	8.508 9647	8.510 3905	1.41906	2.3924	6.2359	7.832
10	8.508 9604	8.510 3776	1.42157	2.3923	6.2398	
20	8.508 9561	8.510 3648	1.42409	2.3922	6.2436	7.830
30	8.508 9518	8.510 3519	1.42660	2.3921	6.2475	
40	8.508 9475	8.510 3391	1.42911	2.3920	6.2514	7.827
50	8.508 9433	8.510 3262	1.43163	2.3918	6.2553	
47° 0'	8.508 9390	8.510 3134	1.43414	2.3917	6.2592	7.824
10	8.508 9347	8.510 3005	1.43666	2.3915	6.2632	
20	8.508 9304	8.510 2877	1.43917	2.3913	6.2671	7.821
30	8.508 9261	8.510 2749	1.44169	2.3911	6.2710	
40	8.508 9219	8.510 2621	1.44421	2.3909	6.2750	7.817
50	8.508 9176	8.510 2493	1.44673	2.3906	6.2790	
48° 0'	8.508 9133	8.510 2364	1.44926	2.3904	6.2830	7.814
10	8.508 9091	8.510 2236	1.45178	2.3901	6.2870	
20	8.508 9048	8.510 2108	1.45431	2.3898	6.2910	7.811
30	8.508 9005	8.510 1981	1.45683	2.3895	6.2950	
40	8.508 8963	8.510 1853	1.45937	2.3892	6.2990	7.807
50	8.508 8920	8.510 1725	1.46190	2.3889	6.3031	
49° 0'	8.508 8878	8.510 1598	1.46443	2.3886	6.3071	7.804
10	8.508 8835	8.510 1470	1.46696	2.3882	6.3112	
20	8.508 8793	8.510 1343	1.46950	2.3878	6.3153	7.800
30	8.508 8750	8.510 1216	1.47204	2.3875	6.3194	
40	8.508 8708	8.510 1088	1.47459	2.3871	6.3235	7.796
50	8.508 8666	8.510 0962	1.47713	2.3866	6.3276	
50° 0'	8.508 8623	8.510 0835	1.47968	2.3862	6.3318	7.792
10	8.508 8581	8.510 0708	1.48223	2.3858	6.3359	
20	8.508 8539	8.510 0581	1.48478	2.3853	6.3401	7.788
30	8.508 8497	8.510 0455	1.48734	2.3848	6.3443	
40	8.508 8455	8.510 0328	1.48989	2.3843	6.3485	7.784
50	8.508 8413	8.510 0202	1.49246	2.3838	6.3527	
51° 0'	8.508 8371	8.510 0076	1.49502	2.3833	6.3569	7.780
10	8.508 8329	8.509 9950	1.49759	2.3828	6.3612	
20	8.508 8287	8.509 9825	1.50016	2.3822	6.3654	7.776
30	8.508 8245	8.509 9699	1.50273	2.3817	6.3697	
40	8.508 8203	8.509 9574	1.50531	2.3811	6.3740	7.772
50	8.508 8161	8.509 9448	1.50789	2.3805	6.3782	
52° 0'	8.508 8120	8.509 9323	1.51048	2.3799	6.3826	7.767
10	8.508 8078	8.509 9198	1.51307	2.3792	6.3869	
20	8.508 8036	8.509 9074	1.51566	2.3786	6.3912	7.763
30	8.508 7995	8.509 8949	1.51826	2.3779	6.3956	
40	8.508 7953	8.509 8825	1.52086	2.3773	6.4000	7.758
50	8.508 7912	8.509 8701	1.52347	2.3766	6.4043	
60	8.508 7871	8.509 8577	1.52608	2.3759	6.4088	7.753

LAT. ϕ	LOG A	LOG B	LOG C	LOG D	LOG E	LOG F
53° 0'	8.508 7871	8.509 8577	1.52608	2.3759	6.4088	7.753
10	8.508 7829	8.509 8453	1.52869	2.3751	6.4132	
20	8.508 7788	8.509 8329	1.53131	2.3744	6.4176	7.748
30	8.508 7747	8.509 8206	1.53393	2.3736	6.4221	
40	8.508 7706	8.509 8083	1.53656	2.3729	6.4265	7.743
50	8.508 7665	8.509 7960	1.53919	2.3721	6.4310	
54° 0'	8.508 7624	8.509 7838	1.54183	2.3713	6.4355	7.738
10	8.508 7584	8.509 7715	1.54447	2.3705	6.4400	
20	8.508 7543	8.509 7593	1.54712	2.3696	6.4446	7.733
30	8.508 7502	8.509 7471	1.54977	2.3688	6.4491	
40	8.508 7462	8.509 7349	1.55243	2.3679	6.4537	7.728
50	8.508 7421	8.509 7228	1.55510	2.3670	6.4583	
60	8.508 7381	8.509 7107	1.55777	2.3661	6.4629	7.723

TABLA III

TABLA DE CORRECCIONES A LA LONGITUD POR DIFERENCIA DE ARCO Y SEXO

(U. S. Coast and Geodetic Survey—Report 1894)

El logaritmo de la diferencia se da en unidades de la séptima decimal.

log s (—)	log dif.	log dL (+)	log s (—)	log dif.	log dL (+)	log s (—)	log dif.	log dL (+)
3.876	1	2.385	4.871	98	3.380	5.172	392	3.681
4.026	2	2.535	4.882	103	3.391	5.178	402	3.687
4.114	3	2.623	4.892	108	3.401	5.183	412	3.692
4.177	4	2.686	4.903	114	3.412	5.188	422	3.697
4.225	5	2.734	4.913	119	3.422	5.193	433	3.702
4.265	6	2.774	4.922	124	3.431	5.199	443	3.708
4.298	7	2.807	4.932	130	3.441	5.204	453	3.713
4.327	8	2.836	4.941	136	3.450	5.209	464	3.718
4.353	9	2.862	4.950	142	3.459	5.214	474	3.723
4.376	10	2.885	4.959	147	3.468	5.219	486	3.728
4.396	11	2.905	4.968	153	3.477	5.223	497	3.732
4.415	12	2.924	4.976	160	3.485	5.228	508	3.737
4.433	13	2.942	4.985	166	3.494	5.233	519	3.742
4.449	14	2.958	4.993	172	3.502	5.238	530	3.747
4.464	15	2.973	5.002	179	3.511	5.242	541	3.751
4.478	16	2.987	5.010	186	3.519	5.247	553	3.756
4.491	17	3.000	5.017	192	3.526	5.251	565	3.760
4.503	18	3.012	5.025	199	3.534	5.256	577	3.765
4.526	20	3.035	5.033	206	3.542	5.260	588	3.769
4.548	23	3.057	5.040	213	3.549	5.265	600	3.774
4.570	25	3.079	5.047	221	3.556	5.269	613	3.778
4.591	27	3.100	5.054	228	3.563	5.273	625	3.782
4.612	30	3.121	5.062	236	3.571	5.278	637	3.787
4.631	33	3.140	5.068	243	3.577	5.282	650	3.791
4.649	36	3.158	5.075	251	3.584	5.286	663	3.795
4.667	39	3.176	5.082	259	3.591	5.290	674	3.799
4.684	42	3.193	5.088	267	3.597	5.294	687	3.803
4.701	45	3.210	5.095	275	3.604	5.299	702	3.808
4.716	48	3.225	5.102	284	3.611	5.303	716	3.812
4.732	52	3.241	5.108	292	3.617	5.307	729	3.816
4.746	56	3.255	5.114	300	3.623	5.311	743	3.820
4.761	59	3.270	5.120	309	3.629	5.315	757	3.824
4.774	63	3.283	5.126	318	3.635	5.319	771	3.828
4.788	67	3.297	5.132	327	3.641	5.323	785	3.832
4.801	71	3.310	5.138	336	3.647	5.327	800	3.836
4.813	75	3.322	5.144	345	3.653	5.331	814	3.840
4.825	80	3.334	5.150	354	3.659	5.335	829	3.844
4.834	84	3.343	5.156	364	3.665	5.339	845	3.848
4.849	89	3.358	5.161	373	3.670	5.343	861	3.852
4.860	94	3.369	5.167	383	3.676	5.347	877	3.856

TABLA IV

TABLA DE LOS VALORES DE $\log \sec \frac{1}{2} (d\phi)$ EN UNIDADES DE LA SEXTA DECIMAL LOGARÍTMICA

$d\phi$	$\log \sec \frac{1}{2} (d\phi)$	$d\phi$	$\log \sec \frac{1}{2} (d\phi)$	$d\phi$	$\log \sec \frac{1}{2} (d\phi)$
10'	1	38'	7	66'	20
11	1	39	7	67	21
12	1	40	7	68	21
13	1	41	8	69	22
14	1	42	8	70	22
15	1	43	8	71	23
16	1	44	9	72	24
17	1	45	9	73	24
18	1	46	10	74	25
19	2	47	10	75	26
20	2	48	11	76	26
21	2	49	11	77	27
22	2	50	11	78	28
23	2	51	12	79	29
24	3	52	12	80	29
25	3	53	13	81	30
26	3	54	13	82	31
27	3	55	14	83	32
28	4	56	14	84	32
29	4	57	15	85	33
30	4	58	15	86	34
31	4	59	16	87	35
32	5	60	16	88	36
33	5	61	17	89	36
34	5	62	18	90	37
35	6	63	18		
36	6	64	19		
37	6	65	19		