Un capítulo de Fotogrametría de W. Jordán

En diversas ocasiones el Instituto de Ingenieros ha tratado la cuestión del levantamiento de nuestra carta catastral, aunque ha de confesarse que sin llegar á un resultado positivo hasta ahora. La presente comunicación por cierto que tampoco tiene pretensiones de llegar á ese resultado.

El asunto es digno de la mayor atención y se hace ya más y más necesario emprender algo para encaminarlo y contribuír á formar la base de una operación de largo aliento que haya de obedecer á un plan bien concebido y estudiado hasta sus más ínfimos detalles. Precisamente aquí es donde se presentan tal vez las mayores dificultades, nacientes principalmente de la organización del trabajo, de la educación y preparación del personal adecuado.

Intimamente ligado á esta cuestión está el levantamiento de una carta general de Chile, trabajo primordial, sin el cual no se concibe bien una carta catastral.

A ninguno de los colegas se le escapará que se trata de una empresa de largo aliento que exige un numeroso personal perfectamente organizado y sobre todo bien preparado para dar cumplido fin á las labores que se le impongan. Todo esto naturalmente no se hace de balde y tal vez lo costoso de la obra haya sido motivo para que nuestro Gobierno aun no la haya emprendido.

Por otra parte, la mucha política, con descuido de los verdaderos intereses del país, es una herencia común á todas las repúblicas sud americanas, de la cual tampoco ha quedado libre nuestro Chile, y no es ella la que menos pueda haber influído en la postergación de estos importantes trabajos.

Ante todo conviene dejar bien establecido que las cartas que poseemos de ninguna manera pueden servirnos de base para futuros levantamientos, pues obtendriamos un conjunto más defectuoso aún después de gastar mucho dinero y más trabajo. En fin, para expresarme en pocas palabras, es necesario rehacer en primer lugar el mapa general de Chile.

Aparte de las mensuras aisladas que puedan servir para la organización previa del trabajo, las que felizmente no escasean, al menos en las provincias centrales, pues casi no hay hacienda que no haya sido mensurada; aparte, digo, de estas mensuras, será necesario proceder á formar una especie de croquis ó algo más que croquis, ligado á una serie de puntos fijos y bien marcados. Dichos croquis servirán más tarde para los levantamientos detallados.

Pues bien, el objeto propuesto relativo á la formación de croquis queda reducido á simples operaciones de fotografía, que ayudadas de ciertas mensuras de ángulos permiten obtener no solo croquis, sino verdaderos planos, resultado de una copia fiel de la naturaleza del terreno. La rapidez de la operación y su menor costo probable, logrando un resultado que pueda bastar á las necesidades de algunos años, me han inducido á comunicar al Instituto algunos datos sobre fotogrametría sacados del *Handbuch der Vermessungskunde*, del Dr. W. Jordán, profesor de la Escuela Técnica Superior de Hannover, 4.ª edición de 1893, cuyo tomo II ha sido publicado hace poco.

Efectivamente, creo que la fotogrametría está llamada á desempeñar un papel de la mayor importancia en los futuros levantamientos que se hagan en nuestro país con relación al mapa general de Chile. Los ejemplos que se citan más adelante me inducen á ello, pues tenemos aquí todas las condiciones favorables que se han utilizado en Italia, donde la fotogrametría se ha aplicado en grande escala. Esas condiciones son la escasa vejetación y nuestro terreno montañoso. Hago abstracción de nuestro valle central, en que por otro lado es más fácil la formación de una red de triángulos geodésicos que, llevados al orden necesario, aun en parte no se opondrán á la fotogrametría. El boscoso sur está aun lejos de permitir levantamientos más exactos y más todavía de exigirlos.

Hoy día en que la fotografía está puesta al alcance de todos, se hace más fácil utilizarla como medio para la construcción de planos, desde que no es precisamente necesario el empleo de teodolitos fotogramétricos.

Sea con aparatos especiales ó nó, habría conveniencia en ensayar entre nosotros el procedimiento, dando así un pequeño paso en el camino que nos ha de conducir al levantamiento del mapa general de Chile.

Precedido este trabajo de una operación geodésica y ligado á una red de triángulos llevados hasta el orden necesario, tendríamos iniciada una obra buena y exacta que se podría continuar poco á poco según los medios y el personal disponibles.

Mientras tanto toda mensura que se haga antes de emprender operaciones geodésicas, será un simple trabajo aislado, de difícil comprobación y más difícil unión con otros levantamientos cercanos. Nada raro sería entonces encontrar fajas en blanco ó superposiciones del terreno al tratar de hacer una carta basada así en trabajos aislados.

Si se toma en cuenta que una carta catastral implica necesariamente la fijación definitiva de los deslindes de los terrenos que ella abarca, y si se considera el sinnúmero de pleitos que con esto pueden evitarse para el futuro, por cierto que valdría la pena emprender una operación que aunque llegue á costar millones con el tiempo, dejará tal vez iguales sumas en manos de los propietarios, habilitándolos para emplearlas en mejorar sus fundos y explotarlos más racionalmente, en lugar de gastarlas en honorarios de abogados y pago de tinterillos.

No considero necesario hacer hincapié en la regularización de los impuestos y demás ventajas de carácter puramente administrativo que trae consigo una carta catastral. Siendo estos sus objetos principales al hacerla, ellos llegan á ser secundarios cuando el catastro se liga al mapa general y bien detallado del país. Las sumas que pueden llegarse á economizar en estudios de anteproyectos de ferrocarriles, canales, etc., por sí solas pagarán un trabajo de algunos años, pues dichos estudios pueden muy bien quedar reducidos en gran parte á simples operaciones de oficina y de dibujo.

Aparte de los ferrocarriles, el estudio de canales de regadío está íntimamente ligado á la vitalidad de nuestra producción agrícola, y sabe Dios cuántos kilómetros de terreno hoy árido é improductivo podrían habilitarse dentro de nuestro territorio haciendo los estudios del caso, cuya base sería siempre un buen mapa. Conviene citar al respecto lo que dice Mr. J. W. Powell en la 2.ª parte del *Tenth annual report of the United States Geological Survey, 1888-1889:*

«El área de la región árida (de los Estados Unidos) es de « más ó menos 1.300,000 millas cuadradas, la tercera parte de « la superficie total del país. Considero que de esta superficie « pueden habilitarse económicamente por regadío y durante la « presente generación á lo menos 150,000 millas cuadradas—un « imperio igual á la mitad del área actualmente cultivada en los « Estados Unidos. Regado este terreno no valdría menos de « 30 pesos por acre, agregando así 2,880.000,000 pesos á la ri- « queza nacional.»

Creo que este cálculo no necesita comentarios y sí imitación, bien entendido que no abarca sino *un punto* de los tantos cuyo estudio quedaría casi ya hecho en un buen mapa detallado de Chile. Atendida la superficie de Chile, ya la milésima parte de la suma citada representaría un progreso para nosotros, y el costo de los estudios por cierto que no alcanzaría á tanto. La obra misma tocaría en seguida á los interesados.

Temo extenderme demasiado en consideraciones y divagaciones sobre la absoluta necesidad de iniciar trabajos serios relacionados con la carta general de Chile y paso al capítulo que es propiamente el objeto de la presente comunicación.

IDEAS FUNDAMENTALES

Ya poco después del descubrimiento de la fotografía nació la idea de valerse de dos fotografías para la construcción geométrica de los puntos fijados en ellas.

Inmediatamente se concibe que ha de ser posible fijar en el espacio un objeto cualquiera dado por dos vistas en perspectiva. Si suponemos dos cuadros planos, en perspectiva y orientados, es decir, colocados de modo que todas las visuales dirigidas desde los puntos de vista (observación) á los objetos en el espacio, corten á los planos de los cuadros en las verdaderas imájenes de los mismos objetos; en tal caso la construcción no solo será posible, sino que en la fijación de cada punto se tendrá también una *prueba*, en el sentido de que las rectas cuya intersección conduce á tal fin deben cortarse en el espacio.

Consideremos primeramente una sola vista en perspectiva sobre un plano vertical. En la fig. 1 sea H'HV'V el plano, O el punto de vista en el espacio y A su proyección sobre el plano. El punto A situado en el horizonte del cuadro se llama *punto principal* ó también punto de vista sobre el plano.

Además $OA = r$ es la distancia de la vista ó la *distancia principal* medida sobre la perpendicular al plano del cuadro.

Si P es un punto del cuadro con la visual OP, y P_1 la proyección de P sobre el horizonte, $AP_1 = x$ y $P_1P = y$ son las coordenadas rectangulares de P sobre el plano del cuadro. Además se ha observado el ángulo de direccion A O P_1 = entre OP_1 y la normal OA junto con el ángulo vertical $P_1 OP = \eta$.

Con esto se obtienen para x é y las dos ecuaciones:

$$x = r \text{ tang. } \omega \qquad y = \frac{r}{\cos \omega} \text{tang. } \omega \qquad (1)$$

Estas dos ecuaciones comprenden la ley general de la vista en perspectiva sobre un plano y permiten también la determinación de la escala del cuadro en cualquier punto y cualquier dirección. Llamamos *escala* la razón v entre una pequeña variación lineal ds en la situación del punto sobre el cuadro y la correspondiente variación d ω del ángulo para el radio = 1. Así en general se tiene $v = ds : d\omega$ y particularmente en el horizonte:

$$v_1 = \frac{dx}{d\omega} = \frac{r}{\cos^2 \omega} \qquad (2)$$

Por lo tanto si el cuadro abraza 45° del horizonte, en los bordes se tendrá $\omega = 22°30'$ y para r = 1 se tiene:

en el medio	$\omega = 0°$	$v_0 = 1{,}000$
en los bordes	$\omega = 22°30'$	$v_1 = 1{,}172$

es decir, que en el horizonte y en los bordes, la escala es 17% mayor que en el medio.

Del mismo puede formarse la escala para las alturas:

$$v_2 = \frac{dy}{d\eta} = \frac{r}{\cos\omega \cos^2 \eta} \qquad (3)$$

Comunmente los ángulos de inclinación η son pequeños, cuando más de 5°, y en tal caso puede hacerse el factor $\cos^2 \eta = 1$, pues $\cos^2 5° = 1 - 0{,}0076$. La despreciación de la diferencia con 1, cuando r = 200 mm., puede ocasionar un error máximo de 0,13 mm. que puede despreciarse en la mayor parte de los casos. Si se supone una escala constante de alturas para $\eta = 2\frac{1}{4}°$, se podrá despreciar entre $-5°$ y $\times 5°$ la variación de la escala de alturas en cada ordenada, de modo que no sea necesario construírlas exactamente según la tangente. Por el contrario no puede despreciarse tan fácilmente la variación de la escala de alturas dependiente de una variación de la abscisa ó del ángulo de dirección, pues, por ejemplo, cos. $22° = 1 - 0{,}07$ así que en este caso la escala de alturas en el borde ya es 7% mayor que en el medio.

La expresión general para la proporción del aumento (que raras veces se usa) es

$$v = \frac{ds}{d\omega}$$

en que

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \qquad y \ d\omega^2 = (d\omega \cos\eta)^2 + d\eta^2$$

siendo

$$dx = \frac{r}{\cos^2\omega} d\omega \qquad dy = \frac{r}{\cos\omega} \cdot \frac{d\eta}{\cos^2\eta}$$

y por lo tanto

$$v^2 = \frac{r^2 \ (d\omega^2 \cos^4\eta + d\eta^2 \cos^2\omega)}{\cos^4\omega \ \cos^4\eta \ (d\omega^2 \cos^2\eta + d\eta^2)} \tag{4}$$

DETERMINACIÓN DEL PUNTO PRINCIPAL Y DE LA DISTANCIA PRINCIPAL

Supuesto un plano vertical para el cuadro, primeramente se tratará de determinar el horizonte, en seguida sobre éste la posición del punto principal A y después la distancia principal AO = r perpendicular al plano del cuadro (fig. 1.)

El horizonte HH′ se encontrará fácilmente si de dos puntos á lo menos se conocen los ángulos verticales η y los ángulos de dirección ω, los últimos al menos aproximadamente, así como la distancia principal r también aproximada.

Así para la determinación del horizonte suponemos ya conocidas aproximadamente las incógnitas ω y r, que vamos á determinar en seguida, lo que es admisible contando las abscisas x desde *el medio* de la hoja y trabajando por lo demás indirectamente como en tantos otros casos. Esto supuesto y que se haya medido exactamente con teodolito el ángulo vertical η de un punto, tendremos según (1) $y = r \sec \omega \operatorname{tang.} \eta$.

Esto, calculado á lo menos para dos puntos y aplicado con el compás nos fija el horizonte.

Por sí solas resultan también las proyecciones de los puntos sobre el horizonte, y si hemos medido en el espacio los ángulos horizontales entre los puntos, ellos son al mismo tiempo los ángulos entre esos mismos puntos proyectados en el horizonte del cuadro.

Consideremos sobre el horizonte del cuadro (fig. 3) tres puntos P_1 P_2 P_3 fijos por sus distancias $P_1 P_2 = a$ y $P_2 P_3 = b$ y supongamos que se hayan medido los dos ángulos horizontales $P_1 OP_2 = \alpha$ y $P_2 OP_3 = \beta$; con esto determinemos la posición del punto principal A y la distancia principal $AO = r$.

Tenemos aquí el conocido problema de la fijación de un punto por observación de otros tres (intersección hacia otras), con la simplificación de que los tres puntos dados P_1 P_2 P_3 están sobre una recta.

En la fig. 2 tenemos dos distancias a y b con los ángulos opuestos α y β y como es sabido:

$$s_2 = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} \operatorname{sen} \gamma_2 = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} \operatorname{sen} \gamma_3 \tag{5}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \gamma_3}{\operatorname{sen} \gamma_1} = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} : \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} \operatorname{tang.} \lambda_3 \tag{6}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \gamma_1 - \operatorname{sen} \gamma_3}{\operatorname{sen} \gamma_1 + \operatorname{sen} \gamma_3} = \frac{1 - \operatorname{tang.} \lambda}{1 + \operatorname{tang.} \lambda} = \operatorname{cotg.} (45^\circ + \lambda)$$

$$\operatorname{tang.} \frac{\gamma_1 - \gamma_3}{2} = \operatorname{tang.} \frac{\gamma_1 + \gamma_3}{2} \operatorname{cotg.} (45^\circ + \lambda) \tag{7}$$

Conocido $\gamma_1 + \gamma_3 = 180^o - (\alpha + \beta)$ se pueden determinar γ_1 y γ_3. Sin embargo, todo puede expresarse inmediatamente en función de α y β:

$$\text{tang.}\ \frac{\gamma_1 - \gamma_3}{2} = \text{cotg.} \frac{\alpha + \beta}{2} \text{cotg.}\ (45^o + \lambda) \tag{8}$$

De todos modos, pueden determinarse los tres ángulos γ_1 γ_2 y γ_3 y con ello las tres distancias:

$$s_2 = \frac{a}{\text{sen}\ \alpha} \text{sen}\ \gamma_1 = \frac{b}{\text{sen}\ \beta} \text{sen}\ \gamma_3$$

$$s_1 = \frac{a}{\text{sen}\ \alpha} \text{sen}\ \gamma_2 \qquad s_3 = \frac{b}{\text{sen}\ \beta} \text{sen}\ \gamma_2$$

También obtenemos los ángulos de dirección ω_1 ω_2 ω_3 de las tres visuales con respecto á OA:

$$\omega_1 = 90^o - \gamma_1 \qquad \omega_2 = 90^o - \gamma_2 \qquad \omega_3 = 90^o - \gamma_3$$

Para la distancia principal tenemos los tres valores:

$$r = s_1\ \text{sen}\ \gamma_1 = s_2\ \text{sen}\ \gamma_2 = s_3\ \text{sen}\ \gamma_3$$

$$= s_1\ \cos\ \omega_1 = s_2\ \cos\ \omega_2 = s_3\ \text{sen}\ \omega_3$$

ó bien r espresada directamente en función de a, b y ω:

$$r = \frac{a \cos \omega_1 \cos \omega_2}{\text{sen}\ (\omega_2 - \omega_1)} = \frac{b \cos \omega_2 \cos \omega_3}{\text{sen}\ (\omega_3 - \omega_2)} \tag{9}$$

También se tienen las abscisas de los tres puntos P_1 P_2 P_3 á partir del punto principal A:

$$\left.\begin{array}{lll} AP_1 = x_1 = s_1 \text{sen}\omega_1 & AP_2 = x_2 = s_2 \text{sen}\omega_2 & AP_3 = x_3 = s_3\ \text{sen}\omega_3 \\ \quad = r\ \text{tang.}\ \omega_1 & \quad = r\ \text{tang.}\ \omega_2 & \quad = r\ \text{tang.}\ \omega_3 \end{array}\right\} \tag{10}$$

Estos son los valores absolutos, los que naturalmente pueden proveerse de signos ($-x$ á la izquierda y $+x$ á la derecha de A.)

Para un ejemplo numérico tenemos:

$$\left.\begin{array}{llll} P_1 & \text{esquina cerro J.} & & \\ P_2 & \text{Minaret II} & a = 79,4 \text{ mm} & \alpha = 23^\circ 5' \\ P_3 & (20) & b = 71,2 \text{ mm} & \beta = 19^\circ 33' \\ \hline & & a + b = 150,6 & \alpha + \beta = 42^\circ 38' \\ & & \text{luego } \gamma_1 + \gamma_3 = 137^\circ 22' & \end{array}\right\} (11)$$

El cálculo según las fórmulas anteriores, que no es necesario poner aquí en todos sus detalles, da:

$$\begin{array}{lll} \lambda = 43^\circ 35' 6'' & \lambda + 45^\circ = 88^\circ 35' 6'' & \\ \gamma_1 = 72^\circ 18' 20'' & \gamma_2 = 84^\circ 36' 40'' & \gamma_3 = 65^\circ 3' 40'' \\ \omega_1 = -17^\circ 41' 40'' & \omega_2 = -5^\circ 23' 20'' & \omega_3 = 24^\circ 56' 20'' \\ s_1 = 201,62 \text{ mm.} & s_2 = 192,93 \text{ mm.} & s_3 = 211,83 \text{ mm.} \\ x_1 = -61,28 \text{ mm.} & x_2 = +18,12 \text{ mm.} & x_3 = +89,32 \text{ mm.} \\ & & r = 192,08 \text{ mm.} \end{array}$$

Prueba $x_2 - x_1 = 79{,}40$ mm. $= a$ $x_3 - x_2 = 71{,}20$ mm. $= b$

Por lo tanto el punto principal A del cuadro se encuentra á 61, 28 mm. á la derecha de P_1 ó bien á 18,12 mm. á la izquierda de P_2.

El ejemplo anterior pertenece al levantamiento figurado en la lámina anexa; se trata de la hoja A, 7 respecto de O_1, en que los puntos esquina cerro J y Minaret II están representados por P_1 y P_2 de la fig. 2, mientras que el tercer punto P_3 ya no existe, pues las fotografías eran primitivamente más grandes y quedaban superpuestas, mientras que en la figura están recortadas en los bordes.

Además debe observarse que las dimensiones arriba indicadas (11) $a = 79,4$ mm. y $b = 71,2$ mm. se referían á las fotografías mismas, mientras que en el dibujo las fotografías están representadas con una reducción próxima á la razón 2 : 3.

Tomando en cuenta esto, podemos hacer sobre la misma hoja A,7 respecto de O_1 una segunda determinación como la anterior, si bien algo desfavorable, á saber:

Con P_1 = esquina cerro J		
P_2 = Minaret III	$a = 25{,}7$mm.	$\alpha = 7^\circ 11'$
P_3 = Minaret II	$b = 53{,}7$mm.	$\beta = 15^\circ 54'$
	$a + b = 79{,}4$mm.	$\alpha + \beta = 23^\circ 5'$
		$\gamma_1 + \gamma_3 = 156^\circ 55'$
Esto da:	$\lambda = 46^\circ 21' 25''$	$\lambda + 45^\circ = 91^\circ 21' 25''$
$\gamma_1 = 71^\circ 50' 30''$	$\gamma_2 = 100^\circ 58' 30''$	$\gamma_3 = 85^\circ 4' 30''$
$\omega_1 = 18^\circ 9' 30''$	$\omega_2 = 10^\circ 58' 30''$	$\omega_3 = 4^\circ 55' 30''$
$s_1 = 201{,}77$mm.	$s_2 = 195{,}29$mm.	$s_3 = 192{,}43$mm.
$x_1 = -62{,}88$mm.	$x_2 = -37{,}18$mm.	$x_2 = +16{,}52$mm.
		$r = 191{,}72$mm.
	$x_2 - x_1 = 25{,}70$mm	$x_3 - x_2 = 53{,}70$mm.

Como $a + b$ y $\alpha + \beta$ corresponden á a y α del ejemplo anterior, se tienen diversas comparaciones, por ejemplo $x_3 = +16,52$ con $x_2 = 18,12$ mm., por lo tanto variación del punto principal en 1,6 mm. y en seguida $r = 191,72$ mm. contra $r = 192,08$, por lo tanto variación de 0.36 mm.

Por estos cálculos y construcciones el punto principal se encontró próximamente en el medio de la hoja, como podía suponerse.

Si se sabe que el punto principal está cerca del medio de la hoja, bastarán dos puntos para la orientación, es decir, para la determinación de la distancia principal ó para la corrección de la primera suposición sobre la situación del punto principal. Sean dos puntos P_1 y P_2 (fig. 3) entre los cuales esté situado el punto principal; que la distancia horizontal entre estos dos puntos esté representada por la diferencia $x_2 - x_1$ de dos abscisas medidas desde el punto principal A supuesto, y que además se haya medido el ángulo horizontal α· se tendrá para una determinación indirecta:

$$\text{tang. } \omega_1 = \frac{x_1}{r} \qquad \text{tang, } \omega_2 = \frac{x_2}{r} \qquad (12)$$

$$\omega_2 - \omega_1 = \alpha \qquad x_2 - x_1 = a \qquad (13)$$

Si esto no resulta conforme puede hacerse una corrección en la posición de A; además se tiene:

$$r = \frac{a \cos \omega_1 \ \cos \omega_2}{\text{sen } \alpha} \quad \text{ó} \quad = \frac{(x_2 - xx_1) \cos \omega_1 \ \cos \omega_2}{\text{sen } (\omega_2 - \omega_1)} \qquad (14)$$

y con esto nuevamente ω_1 y ω_2 según (12); este cálculo deberá repetirse hasta obtener resultados conformes.

Con esto se llega á obtener la convicción de que un pequeño error en la posición supuesta del punto principal tiene relativamente poca influencia sobre el ángulo de orientación de los diversos puntos, y es interesante determinar la relación entre un error en la posición supuesta del punto principal y el error correspondiente en la determinación del ángulo de dirección de un punto del cuadro.

Para fijar las ideas, supondremos según la fig. 2, que para las visuales OP_1 y OP_2 se hayan medido los dos ángulos geodésicos de dirección horizontal φ_1 y φ_2 con la diferencia $\varphi_2 - \varphi_1 = \alpha$. Conocida la posición del punto principal A, también queda determinada r y todo lo demás; por ejemplo cualquier punto B cuya abscisa x se haya medido desde A tiene entonces un ángulo azimutal perfectamente determinado con relación á OA y también un ángulo geodésico φ bien fijo referido á las direcciones φ_1 y φ_2 de las visuales OP_1 y OP_2.

Ahora supondremos que la posición de A sea incierta en la cantidad ds, y de aquí resultará otra abscisa x para el punto B observado en el cuadro (mientras que quedan las diferencias de las x); sobre todo, finalmente, debe resultar para B otro ángulo de dirección geodésica (con relación á los dos fijos φ_1 y φ_2). La investigación matemática sobre este caso la hemos tratado en «*Zeitschr f. Verm. 1876*, p. 7-9» y citamos de ahí el resultado final.

$$d\varphi = \frac{(x_1 - x)(x_2 - x)}{r^2 \quad r} dx$$

Si aquí $x = x_1$ ó $x = x_2$ resulta $d\varphi = O$, lo que es natural, pues los puntos P con $x = x_1$ y P_2 con $x = x_2$ tienen *ángulos fijos* φ_1 y φ_2 de orientación geodésica. Por lo demás $d\varphi$ es un máximo cuando x cae en el medio entre x_1 y x_2 y entonces se tiene en segundos:

$$d\varphi_{\text{máx}} = \frac{(x_2 - x_1)^2 \, d\,x}{4\,r^2 \, r} \rho$$

Si por ejemplo se tiene una oja que comprenda 45°, en que $\omega_1 = -22°30'$ y $\omega_2 = +22°30'$, entonces

$$(x_2 - x_1) : 2\,r = \text{tang. } 22°30' = 0{,}414$$

y si además $r = 200$ mm. y $dx = 1$ mm. resulta

$$d\varphi_{\text{máx}} = 0{,}414^2 \cdot \frac{206265}{200} = 177'' = 3' \text{ próximamente.}$$

Un error de 1 mm. en la posición del punto principal A sobre la plancha ocasiona un error de dirección de 3′ cuando más, ó *no es necesario* fijar el punto con la misma exactitud con que se pueden medir las distancias sobre la fotografía.

DISTANCIA PRINCIPAL CONSTANTE

Cuando la distancia del objeto es medianamente grande, sólo de algunos cientos de metros, es sabido que la distancia de la imagen al objetivo permanece casi constante, como para los objetos situados á distancia infinita; sólo para visuales cortas como de menos de 100 metros varía notablemente la distancia de la imagen.

Si se designa por f la distancia focal, por R la distancia del objeto á la lente y por r como antes la distancia de la imagen (mas bien dicho su distancia al punto principal posterior de la lente) se forma la conocida ecuación:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{r} = \frac{1}{f} \quad \text{de donde} \quad r = \frac{R\,f}{R-f}$$

ó con aproximación suficiente para el objeto presente:

$$r = f + \frac{f^2}{R}$$

En nuestro aparato era más ó menos f = 200 mm. con lo que se ha calculado lo siguiente:

R = ∞	r = 200 mm.
R = 400 mt.	r = 200 mm. + 0,1 mm.
R = 100 mt.	r = 200 mm. + 0,4 mm.
R = 50 mt.	r = 200 mm. + 0,8 mm.
R = 20 mt.	r = 200 mm. + 2,0 mm.
R – 5 mt.	r = 200 mm. + 8,3 mm.

Para los levantamientos geodésicos R será siempre mayor que 100 mt. y en consideración á las demás inseguridades en la colocación podrá suponerse r constante. Mientras tanto para los planos de obras de arquitectura ú otros en que se trate de visuales cortas, fácilmente puede tomarse en cuenta la variación de la distancia de la imagen, bastando para ello la colocación de una pequeña escala milimétrica en la parte móvil de la cámara, la que indicará la r correspondiente en cada caso ó servirá para la colocación respectiva.

CONSTRUCCIÓN DE LA PROYECCIÓN HORIZONTAL Y DE LAS ALTURAS

Si se han orientado dos fotografías sobre planos verticales con su horizonte, punto principal y distancia principal, la construcción del plano horizontal correspondiente es un simple problema geométrico, en cuanto sólo se consiga marcar puntos correspondientes sobre dos hojas.

Señalaremos el principio de esta construcción en la simple figura esquemática 4, que representa un cuerpo de cerro de forma de prismatóide.

O_1 y O_2 son los dos puntos de vista desde los cuales se proyecta en perspectiva el cuerpo a b c d e f g h sobre los planos $H_1A_1H_1$ y $H_2A_2H_2$, de modo que abatidos resultan los dos dibujos a b c d... y c d a... en que las rectas H_1H_1 y H_2H representan al mismo tiempo los horizontes.

No entraremos á explicar de qué manera se han orientado en el plano horizontal los dos planos de perspectiva con sus puntos principales A_1, A_2 y sus puntos de vista O_1, O_2. Por ejemplo pueden haberse medido los dos ángulos en O_1 y O_2 entre la base fotogramétrica y las normales O_1A_1, respectivamente O_2A etc. Aquí sólo se trata de demostrar que después de la figuración de los planos (vistas fotográficas) y de los puntos de vista, en el plano horizontal, lo demás es muy sencillo.

Para fijar por ejemplo, la esquina d en el plano, basta con buscar d en cada una de las vistas, trazar las perpendiculares dd_1 y dd_2 sobre los horizontes y unir O_1 con d_1 y O_2 con d_2. La intersección de estas dos rectas da el punto d del plano.

Del mismo modo la esquina h se encuentra trazando las rectas O_1h_1 y O_2h_2 y buscando su intersección.

Así obtendremos las aristas inclinadas cg, dh y ae que se ven completamente desde O_1 y desde O_2, mientras que la cuarta arista bf no se ve sino desde O_1; por lo tanto el plano de la cuarta arista bf *no puede construírse* fotogramétricamente con el material de la fig. 4, sino que deberá buscarse de alguna otra manera.

En la altiplanicie hemos supuesto otro punto K que puede representar una torre alta ó señal ú otro objeto semejante. Este punto K es visible desde O_1 y desde O_2 y se fija en el plano por KK_1 perpendicular á H_1H_1 y por KK_2 perpendicular á H_2H_2, teniéndose que trazar en seguida sólo O_1K_1 y O_2K_2 para obtener K en el plano.

En el ejemplo de este punto K puede mostrarse la determinación de las alturas, con la suposición más sencilla que aquí puede hacerse, cual es que los puntos de vista O_1 y O_2 estén á la misma altura, es decir, en el horizonte común de ambas fotografías.

En la fig. 4 se mide en milímetros:

$$O_1K_1=80,1 \text{ mm}, \quad K_1K=7,0 \text{ mm. y } O_2K_2=80,3 \text{ mm.}$$

$K_2K=7,7$ mm. además de las distancias O_1K y O_2K en medida geodésica; así si el plano de la figura tiene la escala 1:10000, obtendremos:

$O_1K=53,0$ mm$=530$ mt. y $O_2K=48,3$ mm.$=483$ mt., las alturas resultan por simple proporción:

$$h_1=\frac{7,0}{80,1}\cdot 530 \text{ mt.}=46,3 \text{ mt. } h_2=\frac{7,7}{80,3}\cdot 483=46,3 \text{ mt.} \qquad (15)$$

Si los ángulos de elevación de K se han observado directamente desde O_1 y O_2, siendo ellos η_1 y η_2, las alturas se obtienen inmediatamente.

$$h_1=O_1K \text{ tang. } \eta_1 \text{ y } h_2=O_2K \text{ tang. } \eta_2 \qquad (16)$$

Si se presentan grandes distancias, deberán tomarse naturalmente en cuenta las correcciones debidas á la curvatura de la tierra y á la refracción, de la manera ordinaria.

Sea que se calcule por proporciones (15) ó trigonométricamente (16), puede emplearse la regla logarítmica ú otros medios mecánicos ó gráficos, como se describen por ejemplo al tratar de los levantamientos fotogramétricos de montañas hechos por el estado mayor italiano, *Zeitschr f. Verm. 1892*, pág. 76.

LEVANTAMIENTO FOTOGRAMÉTRICO DEL OÁSIS DE DACHEL EN EL DESIERTO DE LIBIA

Como ejemplo de un plano fotogramétrico de alguna extensión hemos representado en la fig. 2 los levantamientos hechos en 1874 junto con el fotógrafo señor Remelé en la expedición Rohlf al desierto de Libia.

Las fotografías se ligaron en forma panorámica y con superposiciones valiéndose de un aparato común con plancha vertical, y desde dos puntos de estación O_1 y O : desde O_1 con 9 planchas y desde O_2 con 8 planchas (de modo que cada plancha comprende como 45°).

De estas 17 planchas en nuestro dibujo se representan sólo 5, á saber:

A,6 A,7 A8 correspondientes á O_1
A,8 A,9 correspondientes á O_2

La distancia principal media quedó determinada por $r=191,6$ mm. para todas las planchas, según el procedimiento trigonométrico indicado antes. (Por más detalles véase *Zeitschr, f. Verm. 1876*, pág 11 y 12.)

Esta distancia principal se marcó en su verdadera longitud $=191,6$ mm. en la construcción original como radio de los círculos trazados en torno de O_1 y O_2, mientras que nuestra lámina da sólo una reducción en la razón 2:3, de modo que $r=128$ mm.

Como base trigonométrica hemos tomado una pequeña triangulación (con determinación astronómica de azimutes) cuyos primeros triángulos y puntos principales pueden verse en nuestra lámina.

Las dos principales estaciones trigonométricas, al mismo tiempo estaciones fotográficas, son O_1 y O_2 que están unidas por el triángulo O_1BC con $O_1B = 294{,}8$ y $BC = 117{,}5$, á que se une B_1CO_2 etc.

Además se han elegido como puntos de triangulación las tres torres de minaret I, II y III, la habitación W de la expedición, un gran sepulcro de schechs (10) y una palma aislada. Como no se habla más de los puntos B y C, damos para los otros ocho los datos de las mensuras en O_1 y O_2 y las coordenadas rectangulares, referidas á la habitación de la expedición como origen y con $+x$ hacia el norte y $+y$ al este.

ESTACIÓN EN O_1, ALTURA $= 133^m$ SOBRE EL MAR

Punto observado	Azimut	Angulo vertical	Distancia
Punto O_2 de la base	62°50′		792,6 mt.
Sepulcro de schechs (10)	85.32	−4° 40′	467,4
Palma P	120.48	−1. 48	620,9
Minaret III	131.43	−2. 11	454,6
Minaret II	147.37	−2. 24	385,8
Habitación W	168.42		189,3
Minaret I	170.30	−3. 12	357,4

ESTACION EN O_2; ALTURA $= 132^m$ SOBRE EL MAR

Punto observado	Azimut	Angulo vertical	Distancia
Palma P	194°12′	−1° 17′	701,4 mt.
Minaret III	208.49	−1. 12′	758,9

Punto observado	Azimut	Angulo vertical	Distancia
Minaret II	215.25	− 1. 3	853,4
Sepulcro de schechs	216°19′	− 5° 19′	403,9
Minaret I	222.12	− 1. 6	963,7
Habitación W	230.32	− 1. 44	875,5
Punto O_1 de la base	242.50	+ 0. 56	792.6

COORDENADAS RECTANGULARES CON + X AL NORTE, + Y AL ESTE

Punto	Y	X	Altura sobre el mar
Habitación W	0,0m.	0,0m.	108m. superficie
Punto O_1 de la base	− 37,2	+ 186,1	133 suelo
Punto O_2 de la base	+ 668,0	+ 548,0	132 »
Minaret I	+ 21,3	− 166,5	115 cúspide
Minaret II	+ 173,8	− 147,6	118 »
Minaret III	+ 301,9	− 116,7	118 »
Sepulcro de schechs (10)	+ 428,8	+ 222,5	106 » suelo = 97 mt.
Palma P	+ 496,0	− 132,0	116 »

Si con estas coordenadas se calculan hacia atras las direcciones trigonométricas (al mismo tiempo azimutes en el caso presente), se encontrarán diferencias hasta de algunos minutos con respecto á los azimutes dados en las estaciones de arriba O_1 y O_2. Esto proviene de que realmente la triangulación ha utilizado varias otras mensuras además de las de aquí indicadas, tomándose el término medio de las coordenadas.

En cuanto las mensuras han servido en el caso presente, todo está en conformidad suficiente.

En todo caso, los ocho puntos pueden fijarse por sus coordenadas sobre un plano horizontal como en la fig. 4; la construcción fotogramétrica se comienza por trazar círculos en torno de O_1 y O_2 con la distancia principal r de las fotografías como radio (en nuestro caso r=191,6 mm. en el original pero reducido á r=128 mm. en fig. 2.)

(Concluirá.)